RJEŠAVANJE PROBLEMA PRONALSKA MASKIMALNOG KAPACITETA FORD-FULKERSONOVIM TEOREMOM

Jozić, Franciska

VELEUČILIŠTE U RIJECI

Franciska Jozić

RJEŠAVANJE PROBLEMA PRONALSKA MASKIMALNOG KAPACITETA FORD-FULKERSONOVIM TEOREMOM

(specijalistički završni rad)

Rijeka, 2018.

VELEUČILIŠTE U RIJECI
Prometni odjel
Specijalistički diplomski stručni studij Promet

RJEŠAVANJE PROBLEMA PRONALSKA MASKIMALNOG KAPACITETA FORD-FULKERSONOVIM TEOREMOM

(specijalistički završni rad)

MENTOR:
mr.sc. Mirta Mataija, predavač

STUDENT:
Franciska Jozić
MBS: 2429000159/16

Rijeka, lipanj 2018.

VELEUČILIŠTE U RIJECI
Prometni odjel
Rijeka, 4. 06. 2018.

ZADATAK
za specijalistički završni rad

Pristupniku Franciski Jozić MBS: 2429000159/16 studentici specijalističkog diplomskog stručnog studija Prometa izdaje se zadatak specijalističkog završnog rada – tema specijalističkog završnog rada pod nazivom:

Rješavanje problema pronalaska maksimalnog kapaciteta Ford - Fulkersonovim teoremom

Sadržaj zadatka: Kandidatkinji se daje zadatak da primjenom Ford-Fulkersonovog teorema izračuna maksimalni kapacitet vozila koji u jedinici vremena može proći centrom grada Rijeke s obzirom na postojeću prometnu infrastrukturu. U teorijskom dijelu rada treba obraditi pojmove teorije grafova nužne za modeliranje kao i metode određivanja maksimalnog protoka kroz mrežu – metodu etiketiranja i metodu dodavanja pozitivnog toka, Ford-Fulkersonov teorem, te konačno pojam propusne moći i maksimalnog kapaciteta prometnice i maksimalnog protoka kroz mrežu. Posebno će se razmotriti procjena maksimalne propusne moći prometnice kao funkcije brzine. U praktičnom dijelu modelirat će se središte grada Rijeke i s obzirom na postojeću prometnu infrastrukturu izračunati maksimalni protok kroz danu cestovnu mrežu. Mreža će imati dva ulaza (izvora) i dva izlaza (ponora), pa će zbog toga biti potrebna mala modifikacija Ford-Fulkersonovog teorema.

Rad obraditi sukladno odredbama Pravilnika o završnom radu Veleučilišta u Rijeci.

Zadano: 28. veljače 2018.

Predati do: 15. lipnja 2018.

Mentor:

mr.sc. Mirta Mataija, predavač

Pročelnik odjela:

dr.sc. Ivica Barišić, prof. v. š.

Zadatak primio dana: 28. veljače 2018.

Franciska Jozić
MBS: 2429000159/16

Franciska Jozić

Dostavlja se:
- **mentoru**
- **pristupniku**

IZJAVA

Izjavljujem da sam specijalistički završni rad pod naslovom Rješavanje problema pronalaska maksimalnog kapaciteta Ford-Fulkersonovim teoremom izradila samostalno, pod nadzorom i uz stručnu pomoć mentorice mr.sc. Mirte Mataije.

Ime i prezime
Franciska Jozić
Franciska Jozić

Sažetak

Tema ovog specijalističkog završnog rada je Rješavanje problema pronalaska maksimalnog kapaciteta Ford-Fulkersonovim teoremom. Grafovi, odnosno mreže, s pridodanim vrijednostima, tj. težinski grafovi, uvelike olakšavaju prikaz problema za njegovo lakše shvaćanje i računanje. Algoritmi su vrlo korisni za postavljanje problema i njegovo rješavanje, dakle, daju točno propisan slijed potupaka za dolazak do konačnog i točnog rješenja. Iako je rješavanje algoritmom komplesno, njegovi rezultati olakšavaju mnoge probleme, vrlo efikasno i prometne. U radu je korišten Ford-Fulkersonov algoritam, odnosno teorem, za rješavanje maksimalnog kapaciteta u odabranim ulicama u centru grada Rijeke. Algoritam se može riješiti na dva načina, koristeći dvije metode te su u radu prikazane obje. Prikazano je računanje na primjeru maksimalnog kapaciteta, koji predstavlja težak problem zbog mnogih varijabli koje utječu na kapacitet. Nije moguće izračunati točan kapacitet, pomoću točno definirane formule, jer ovisi o mnogo faktora koji utječu na različitost kapaciteta te je upotrebom Ford-Fulkersonovog teorema prikazan izračun, koji daje točne podatke i primjenjiv je na sve vrste prometnica i faktora koji utječu na kapacitet.

Ključne riječi: mreža, alogritam, kapacitet, metoda etiketiranja, metoda dodavanja pozitivnog toka

SADRŽAJ

1. UVOD

1.1. Problem, predmet i objekt istraživanja

Problem obrađen u završnom radu je problem izračunavanja maksimalnog kapaciteta. S obzirom da ne postoji univerzalni način za računanje kapaciteta prometnica i da uvelike ovisi o različitim čimbenicima i reakcijama vozača, problem je vrlo kompleksan te nema jedinstvenog načina niti formule za njegovo računanje. Problem se, u ovom radu, pokušao prikazati iz više aspekata, kako bi se dokazala kompleksnost. Bilo bi mnogo jednostavnije kad bi prometni tok mogao biti homogen, međutim to ne postoji te je onda računanje kapaciteta vrlo zahtjevno. Problem je moguće rješavati na način da se izračuna kapacitet za homogeni prometni tok, pa naknadno, po potrebi, umanjuje kapacitet, ovisno o ograničenjima. U radu je problem rješavan na složeniji način, dakle, unaprijed su zadana određena ograničenja te je izračunat kapacitet koji u sebi sadržava zadana ograničenja. Optimalno i najtočnije rješavanje moguće je dobiti matematičkim modeliranjem, korištenjem odgovaraćujeg algoritma te je problem riješen upravo na taj način.

Predmet istraživanja u ovom radu su grafovi, odnosno mreže i njihova primjena na realne situacije. Povezano s time, predmet istraživanja je teorem, kojim je riješen problem, jer je direktno vezan uz mrežu ulica te je potrebno istražiti teorem i njegove značajke, koristi od rješavanja i dobivene rezultate, kako bi se dokazala važnost predmeta istraživanja na rješavanje problema.

Objekti istraživanja su ulice u gradu Rijeci, u kojima se računa kapacitet i u kojima su mjerene određene vrijednosti potrebne za izračun. Kao objekt istraživanja prikazani su i semafori, unutar tih ulica, jer su korišteni kao ograničenje u računanju kapaciteta. U ulicama, prilikom računanja kapaciteta, uzet je u obzir i broj voznih traka, tako da su glavni objekti istraživanja, ulice u gradu Rijeci, koje su korištene u radu, uključujući i ograničenja, kako bi računanje pomoću teorema dalo precizno rješenje.

1.2. Svrha i ciljevi istraživanja

Svrha rada temelji se na prikazivanju važnosti kapaciteta prometnica i načinju njegova rješavanja. S obzirom na težinu i kompleksnost zadatka, svrha istraživanja je prikazati mogućnost rješavanja pomoću algoritma te dokazati mogućnost rješavanja i dobivanja preciznih podataka o maksimalnom kapacitetu vozila. Također, svrha istraživanja je dokazati široku primjenjivost u rješavanju problema kapaciteta ovim algoritmom, jer kapacitet ovisi o mnogim čimbenicima, odnosno ulaznim podatcima. U radu je prikazan primjer na ulicama u gradu Rijeci te je svrha izračunati točan rezultat, ali i dokazati da je primjena teorema moguća na bilo kojoj drugoj lokaciji, s različitim ograničenjima.

Svrha istraživanja obuhvaća i prikaz važnosti teme, kojom se bavi ovaj rad, njezine važnosti i težine dolaska do konkretnih podataka, kao i istraživanje algoritma, koji se koristi za rješavanje problema. Također, svrha istraživanja je dati odgovore na najvažnija pitanja, od kojih su izdvojena sljedeća. Navedena pitanja predstavljaju ciljeve istraživanja.

- Što je teorija grafova, korištena u svrhu optimizacije?
- Što je težinski graf, odnosno mreža i kada se koristi?
- Što su algoritmi i koja su njihova svojstva?
- Kako se prikazuje maksimalan protok kroz mrežu?
- Objasniti metodu etiketiranja.
- Objasniti metodu dodavanja pozitivnog toka.
- Čemu služi Ford-Fulkersonov teorem i kako se računa?
- Što je prometni tok?
- Što je kapacitet (propusna moć) prometnice?
- Koje su mogućnosti i načini računanja kapaciteta?
- Koje se metode koriste u računanju Ford-Fulkersonava teorema?
- Koja ograničenja smanjuju kapacitet?
- Kakva je primjenjivost računanja kapaciteta Ford-Fulkersonovim algoritmom?

Krajnji cilj istraživanja je dokazati uspješno rješavanje problema, korištenjem algoritma. Također, postupnim rješavanjem problema dolazi se do konačnog rješenja, čime je problem uspješno riješen i krajnji cilj ispunjen.

1.3. Znanstvene metode i izvori prikupljanja podataka

Metode koje su korištene u pripremi i obradi ovog završnog rada, u svrhu istraživanja pojava i ostvarenja ciljeva, su sljedeće:

- induktivna i deduktivna metoda – induktivna metoda korištena je za potrebe uopćavanja podataka. U radu je vidljivo korištenje metode na primjeru ulica, koje su promatrane pojedinačno, ali predstavljaju ukupnu mrežu, odnosno puteve. Deduktivna metoda vidljiva je npr. kad se cijeli put može, po potrebi, sagledavati kao put od jedne do druge ulice.
- Metoda analize i sinteze – za shvaćanje i razumijevanje izračuna u ovom radu potrebno je razumjeti pojedinačne pojmove i postupke u računanju. Također, vidljiva je i metoda sinteze, jer iz pojedinačnih elemenata, korištenih u radu, vidljivi su ukupni i složeni. Jednostavniji pojmovi i elementi prikazani su skupno kao cjelina.
- Metoda dokazivanja - kroz rad se mnogi pojmovi, stavovi i činjenice dokazuju.
- Statistička metoda – vidljiva kroz rad iz prikupljanja podataka o ulicama, koje su objekt za daljnje istraživanje, kao i podatcima o trajanju ciklusa i faza semafora.
- Matematička metoda – korištenje vidljivo kroz cijeli rad. Korištenje matematičkih operacija i izračuna od glavne je važnosti u radu.
- Povijesna metoda – prikazano je da se sličnim problemima bavi kroz povijest. Također su prikazane osobe važne za izum algoritma korištenog u radu.
- Metoda apstrakcije i konkretizacije – često su vidljivi primjeri gdje se promatra opće a izostavlja pojedinačno, npr. kad se mreža ulica promatra kao cjelina. Također je vidljiva i obrnuta situacija, npr. ulice se promatraju pojedinačno, a ne kao dio mreže. Konkretizacija je vidljiva u smislu da se predmet rješavanja shvaća kao opće, koje je u sintezi s individualnim.
- Metoda generalizacije – vidljivo npr. na primjeru trajanja faza zelenog svjetla na jednom semaforu; istim principom zaključeno je trajanje na ostalima. Pojedinačna opažanja o objektima u radu dovode do generaliziranih zaključaka.
- Metoda uzoraka – proračun kapaciteta izračunat je odabranom uzorku ulca u gradu Rijeci, međutim, proračun je primjenjiv na bilo koji drugi odabrani uzorak.
- Metoda mjerenja – korištena u mjerenju trajanja faza semafora.

Izvori prikupljanja podataka, koji su korišteni za pisanje rada bili su iz matematičkih knjiga, sručnih i znanstvenih članaka, završnih radova, raznih skripti i materijala te internetskih i bibliotečnih baza podataka. Pojedini ulazni podaci dobiveni su mjerenjem. Sugestije, upute i upućivanje na literaturu, od strane mentorice, bile su vrlo korisne.

1.4. Struktura rada

Ovaj završni rad, pod nazivom Rješavanje problema pronalaska maskimalnog kapaciteta Ford-Fulkersonovim teoremom, sastoji se od sedam povezanih poglavlja, unutar kojih se obrađuju problemi, prikazuju postupci rješavanja i iznose zaključci. U prvom poglavlju, Uvodu, analiziraju se predmet, problem i objekt istraživanja. Sljedeći dio Uvoda su svrha i ciljevi istraživanja. Također su prikazane znanstvene metode i izvori prikljupljanja podataka kao i struktura rada. U drugom dijelu rada, pod naslovom Metode optimizacije, prikazan je razvoj grafova i mreža i njihova važnost u svrhu rješavanja problema. Objašnjeni su i algoritmi, njihovo korištenje i funkcionirnje. U trećem poglavlju u radu, pod naslovom Maksimalan protok kroz mrežu, objašnjeno je prikazivanje problema kroz grafove te način rješavanja maksimalnog protoka. Također su objašnjene dvije metode kojima se rješava problem maksimalnog protoka, odnosno kapaciteta. U četvrtom poglavlju, pod nazivom, Ford-Fulkersonov teorem ukratko su prezentirani tvorci teorema, Ford i Fulkerson te je također prikazan teorem i princip računanja. Peti dio rada, Modeliranje prometa, objašnjava što je to prometni tok. Također, objašnjen je kapacitet prometnice te je prikazan maksimalan protok u cestovnim mrežama na primjeru Bangkoka. Iznijeta su saznanja o modeliranju prometa. U šestom poglavlju prikazan je izračun kapaciteta u odabranim ulicama u gradu Rijeci. Sljedeći dio šestog poglavlja prezentira primjenu Ford-Fulkersonovog teorema na odabranim ulicama, u svrhu izračuna maksimalnog kapaciteta. S obzirom da je zadatak riješen kroz dvije metode, prikazano je rješavanje problema metodom etiketiranja i metodom dodavanja pozitivnog toka. Šesto poglavlje ima naziv Izračun kapaciteta izabranih ulica u gradu Rijeci pomoću Ford-Fulkersonovog teorema. U sedmom, posljednjem poglavlju, pod naslovom Zaključak, iznesena su zaključna razmatranja na temelju dobivenih spoznaja i rezultata iz rada.

2. METODE OPTIMIZACIJE

2.1. Teorija grafova

Teorija grafova jedna je od grana matematike koja nalazi veliku primjenu u prometu. Grafom se mogu opisivati modeli određenoga realnog sustava, kao što su gradovi povezani cestama, rafinerije i potrošači spojeni naftovodima, plinovodi, električni sklopovi i sl.
Jedan od najstarijih problema vezanih uz teoriju grafova upravo je iz područja prometa, poznat pod nazivom Zadatak o kenigsberškim mostovima. Taj zadatak rješavao je Euler[1] 1736. godine i dokazao da traženi put ne postoji. (https://www.veleri.hr/files/datotekep/nastavni_materijali/k_poduzetnistvo_s1/Kvantitativne_za_poduzetnike_Pr4_Izv.pdf). Problem Sedam Königsberških mostova je nastao kada su stanovnici Kaliningrada (tadašnjeg Königsberga) pokušavali pronaći način da prijeđu svih sedam mostova tako da svaki most prijeđu točno jedanput i da se vrate u polaznu točku, ali bezuspješno. Sami mostovi su izgrađeni s obje strane rijeke Pregel i na dva riječna otoka sedam mostova povezuje obje strane rijeke i otoke. Euler je dokazao da na željeni način nije moguće obići svih sedam mostova. Euler je problem pojednostavnio tako da je kopna i otoke zamijenio točkama A, B, C, D i povezao ih linijama koje u stvarnosti predstavljaju mostove. Na taj način dobio je strukturu koju danas nazivamo graf. (Carić, 2014., 4.)

Pojam grafa je vrlo općenit. Osnovna karakteristika grafa je da se sastoji od dva skupa. Svaki graf definiran je skupovima V i E. Skup V (engl. *Vertex*) predstavlja vrhove grafa. Skup E (engl. *Edge*) predstavlja bridove grafa. Graf G definiran je skupovima V i E. Skupovi V i E imaju konačan broj elemenata. (Carić, 2014., 5.)

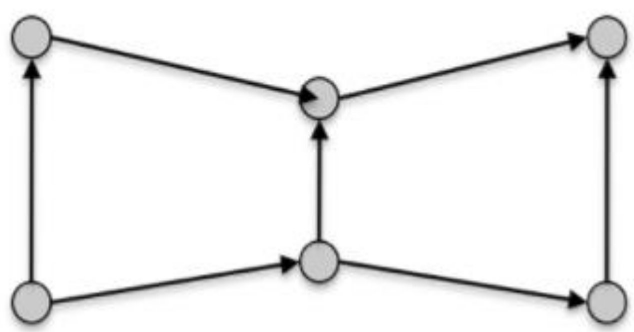
U matematici i računarstvu pod teorijom grafova smatra se proučavanje grafova, matematičkih struktura, korištenih da bi se predstavile relacije koje uključuju dva elementa određene kolekcije. Neformalno govoreći, graf je skup objekata zvanih vrhovi, točke ili čvorovi, povezanih vezama zvanima bridovi ili linije. Ako je dan skup čvorova i drugi skup objekata zvanih bridovi, graf je definiran kao odnos između tih skupova: svaki brid spaja par čvorova. Grafovi se prikazuju crtanjem točaka za svaki vrh i povlačenjem luka između dvaju

[1] Leonhard Euler (1707. – 1783.), 1783.), švicarski matematičar

vrhova, ako su oni povezani bridom. Ako je graf usmjeren, smjer se navodi crtanjem strelice. Svakom bridu može se pridružiti realan broj, što znači da je graf proširen težinskom funkcijom. U slučaju kada graf predstavlja mrežu cesta, težinska funkcija je npr. duljina svakog puta. Takav se graf zove težinski graf.

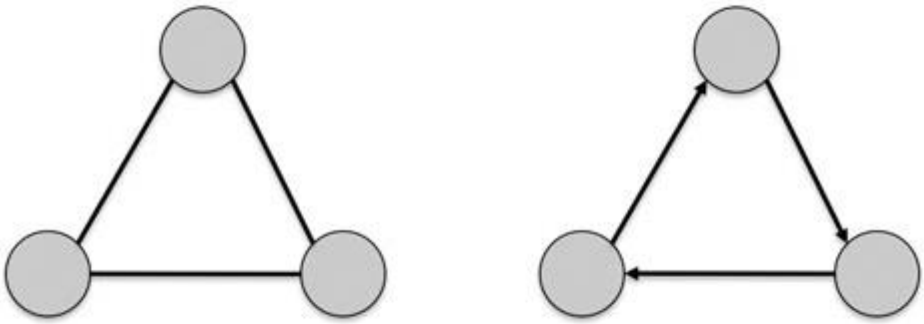
Graf G matematička je struktura koja se koristi za opisivanje relacija između dvaju objekata iz određene kolekcije. U ovom kontekstu graf se odnosi na neprazni skup vrhova i kolekciju bridova koji povezuju par vrhova. Skup vrhova obično se označava s V(G), a skup bridova s E(G). Bridovi mogu biti usmjereni ili ne, ovisno o primjeru. Graf kojemu su svi bridovi usmjereni zove se usmjereni graf, u suprotnom, zove se neusmjereni. U pravom grafu, za koji se inicijalno pretpostavlja da je neusmjeren, linija od točke u do točke v identificira se s linijom od točke v do točke u. U digrafu (skraćeno za usmjereni graf), ta dva smjera smatraju se različitim lukovima, odnosno bridovima. Ako graf G nije usmjeren, tada su dva vrha pridružena jednom bridu međusobno ravnopravna. U usmjerenom grafu brid može biti usmjeren od jednog vrha prema drugome. Slike 1 i 2 primjeri su grafova. (Kramberger, Fošner, 2009., 2.).

Slika 1.: Usmjeren graf sa šest vrhova i sedam bridova



Izvor: Kramberger, T., Fošner, M.: Teorija grafova, 2009., str. 2. http://e.math.hr/taxonomy/term/7/0

Slika 2.: Neusmjeren i usmjeren graf



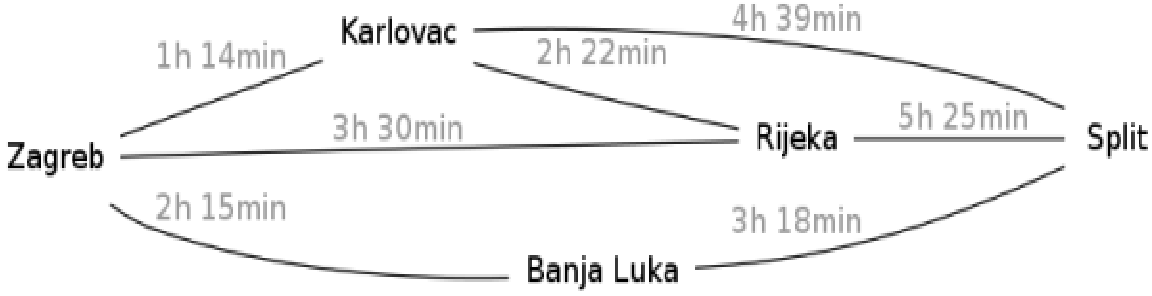
Izvor: Kramberger, T., Fošner, M.: Teorija grafova, 2009., 2. http://e.math.hr/taxonomy/term/7/0

2.2. Težinski grafovi – mreža

U praksi se često javlja potreba da se svakom bridu e grafa G pridruži realan broj w(e) koji se zove težina brida e. Takav graf zove se težinski graf. Tako npr. vrhovi grafa mogu predstavljati gradove, a težine bridova udaljenosti među tim gradovima ili troškove cestarine. Pojam matrice susjedstva može se jednostavno proširiti i na slučaj težinskog grafa. Tada će elementi matrice biti težine odgovarajućih bridova, dakle realni brojevi w(e), a ukoliko ne postoji brid koji spaja neki par vrhova, tada se na odgovarajuće mjesto u težinskoj matrici susjedstva stavlja beskonačno. (Nikšić, 2003., 5.)

Težinski grafovi (engl. *weighted graphs*) definiraju se kao uređeni par (G, w), gdje je G graf, a w funkcija koja svakom bridu e grafa G pridružuje njegovu težinu (*weight*), w(e). Razlikuju se od bestežinskih po tome što svaki brid ima pridruženu težinu (engl. *weight*) prolaska (ponekad se umjesto pojma težina koristi pojam cijena (engl. *cost)*). Oni, također, mogu biti usmjereni i neusmjereni. Bestežinski grafovi često su zamišljani kao težinski, kojima su svi bridovi iste težine. Težina puta (engl. *path weight*) jednaka je sumi bridova na putu. Težina grafa jednaka je sumi svih bridova u njemu.
(https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Osnovni_pojmovi-teorija_grafova.pdf).

Slika 3.: Primjer težinskog grafa; vrijeme putovanja automobilom među gradovima prije izgradnje autocesta



Izvor: www.fer.unizg.hr/_download/repository/Osnovni_pojmovi-teorija_grafova.pdf, 6.

Za analizu prometa, prijenosa informacija, toka dokumenata itd., od posebnog je značenja pojam mreže. Grafom je moguće opisivati model nekog realnog sustava kao što su gradovi povezani cestama, rafinerije i potrošači spojeni spojeni naftovodima, električni sklopovi i sl.. U stvarnom svijetu svakoj će grani grafa biti pridružen neki realni broj, odnosno udaljenost, kapacitet, otpor. Za graf kod kojeg su granama pridružene takve težine, koji se zovu ponderi, uobičajen je naziv mreža.

Mreža je posebno značajna za analizu prometa i prijenosa informacija.

Primjeri mreže:

- Ako se svim cestama grada ili županije pridruže udaljenosti među vrhovima dobiva se mreža.
- Cijevni transportni sustav može se također interpretirati kao mreža. Cijevi koje spajaju vrhove su bridovi mreže, a kapacitet cijevi predstavlja težinu pojedinoga brida, tj. ponderi su kapacitet.
- Dijagram toka aktivnosti nekoga projekta je graf. Vrhovi su stanja projekta, a bridovi su aktivnosti. Ako se pojedinim aktivnostima pridruži vrijeme njihova trajanja, dobiva se mreža. (Štambuk, 2008., 1.).

2.3. Algoritmi

Proučavanje algoritama, koji rješavaju probleme upotrebom grafova, predstavlja veoma značajan dio informatičke i matematičke struke. Mreže imaju mnogo primjena u proučavanju praktičnih aspekata teorije grafova i to se zove analiza mreža.

U matematici, računarstvu i srodnim disciplinama, algoritam ili postupnik je konačan slijed dobro definiranih naredbi za ostvarenje zadatka, koji će za dano početno stanje terminirati u definiranom konačnom stanju.

Riječ "algoritam" dolazi od latinskog prijevoda imena iranskog matematičara Al-Hvarizmija[2], koji se bavio trigonometrijom, astronomijom, zemljopisom, kartografijom, a smatra se ocem algebre jer je definirao osnovna pravila rješavanja linearnih i kvadratnih jednadžbi. Njegovi radovi su osnova razvoja mnogih matematičkih i prirodnih disciplina, među njima i računarstva. (https://hr.wikipedia.org/wiki/Algoritam)

Prvi zapis algoritma prilagođen računalu pripada Adi Byron[3] iz 1842., a računao je Bernoullijeve brojeve. Računalo za koje je napisan je bio analitički stroj, koji je zamislio, ali nikad u potpunosti proveo u djelo, Englez Charles Babbage[4]. Analitički stroj je trebalo biti prvo programabilno računalo, sastavljeno u potpunosti od mehaničkih dijelova. Mehanički dijelovi i fizička glomaznost su glavni razlozi zašto nikad nije završen.

Nedostatak čvrste matematičke forme pravio je određene probleme matematičarima i logičarima 19. i 20. stoljeća prilikom analiziranja algoritama. Definicija Turingovog stroja je riješila većinu tih problema, a predstavio ju je engleski matematičar Alan Turing. Turingov stroj omogućava izvođenje većine današnjih algoritama (uz određene prilagodbe), a dodatno olakšava i analizu složenosti zbog svoje jednostavnosti izvedbe. (https://hr.wikipedia.org/wiki/Algoritam).

---

[2] Rođen oko 780. godine u Horezmu (današnjoj Hivi, Uzbekistan), - umro 850. godine; iranski je matematičar, geograf i astronom.

[3] Smatra se prvom programerkom, matematičarka koja je predložila Babbageu način na koji stroj može izračunavati Bernoullijeve brojeve - prvi kompjutorski program ADA.

[4] Teignmouth, 26. prosinca 1791. – London, 18. listopada 1871., engleski matematičar, filozof i protoračunarski znanstvenik.

Algoritmi imaju sljedeća svojstva:

- diskretnost — u odvojenim koracima izvode se diskretne operacije algoritma koje vode ka konačnom cilju,
- konačnost — označava sposobnost algoritma da nakon konačnog broja koraka daje izlazne podatke odnosno rezultate;
- determiniranost — za iste ulazne podatke algoritam uvijek daje iste rezultate,
- masovnost — algoritam je primjenjiv na veći broj ulaznih vrijednosti.

(https://hr.wikipedia.org/wiki/Algoritam).

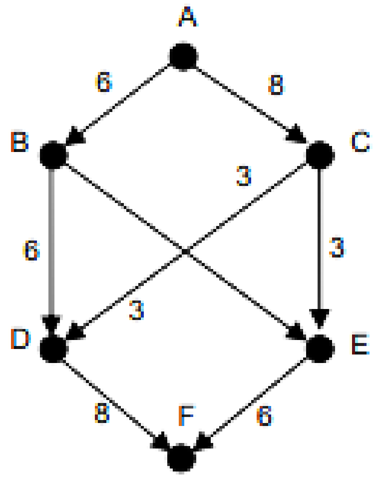
Algoritmi s obzirom na metodologiju dizajna dijele se:

- *Brute force* algoritmi - "čistom silom" računala isprobavaju sve mogućnosti i traže odgovarajuće rješenje. Najneefikasnijji algoritmi.
- Podijeli i vladaj algoritmi, tzv. *Divide and conquer*. Problem se dijeli na više istih, manjih problema. Podjela teče tako dugo dok se ne dođe do malog problema kojeg je jednostavno riješiti.
- Dinamički algoritmi - Metodama dinamičkog programiranja rješavaju se višefazni procesi, tj. procesi u kojima se donosi niz međusobno ovisnih odluka za pojedine godine određenog razdoblja ili za pojedine aktivnosti zadanog problema. Dinamičko programiranje poznato je i pod nazivom metoda donošenja višefaznih, odnosno višestupnjevanih odluka.
- Pohlepni algoritmi, tzv. *greedy* - Pohlepni algoritam je algoritam koji koristi metaheuristiku za rješavanje problema, takvu da u svakom koraku bira lokalno najbolje rješenje, u nadi da će tako iznaći globalni optimum. Ovi algoritmi često ne daju najbolje rješenje već brzu aproksimaciju najboljeg rješenja.
- Algoritmi za sortiranje i pobrojavanje tzv. *search and enumeration* - Algoritmi sortiranja služe za brzo sortiranje podataka, npr. niza brojeva. Mnogi se problemi mogu rješavati teorijom grafova. (https://hr.wikipedia.org/wiki/Algoritam).

3. MAKSIMALAN PROTOK KROZ MREŽU

Grafovima možemo veoma jednostvno modelirati probleme iz stvarnog života. Jedna od uobičajenih primjena grafova je opisivanje mreže naftovoda, prometnica i sličnih protočnih struktura. (Marinović, 23.). Primjer grafa naftovoda prikazan je sljedećom slikom.

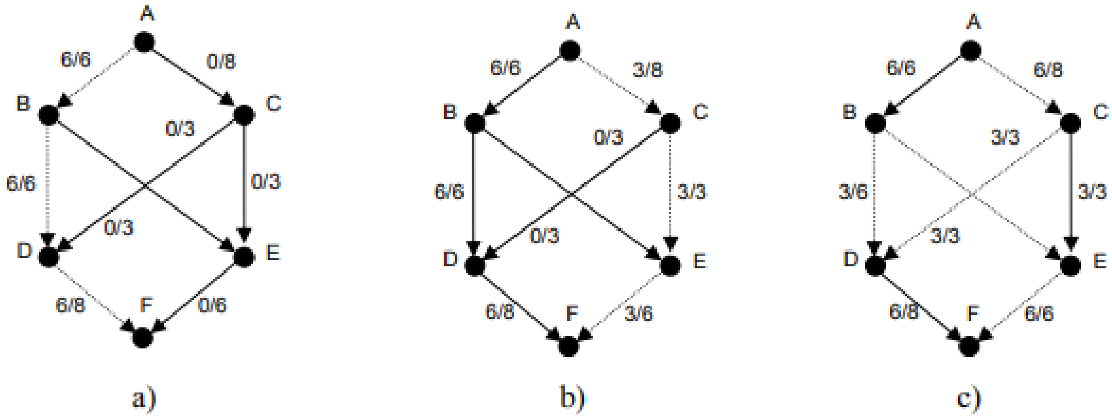
Slika 4.: Model naftovoda prikazan grafom



Izvor: Marinović, M.: Teorija grafova, seminarski rad, Fakultet elektronike i računarstva, str. 23.

Kao što je iz Slike 4. vidljivo, bridovi koji prikazuju cjevovode označeni su strelicama, kako bi se naglasilo da nafta kroz taj brid može teći u samo jednom smjeru. Takav graf naziva se usmjerenim težinskim grafom jer su mu bridovi usmjereni i svaki od njih ima pridjeljenu težinu, odnosno u ovom modelu to se naziva kapacitetom. Vrh iz koga sve strelice izlaze naziva se izvorom, u primjeru to je vrh A, a onaj u koji su usmjerene sve strelice naziva se ponorom, u primjeru je to vrh F. Problem koji se prirodno nameće je koliki kapacitet svakog brida se mora koristiti da bi ukupni protok od izvora do ponora bio maksimalan. Rješenje takvog problema za veće mreže nije uopće trivijalno te se zato koriste razni algoritmi kako bi se takav problem efikasno riješio. Za prikladno opisivanje problema proširuje se oznaka težine brida na dva broja, od kojih drugi govori koliki je kapacitet brida, tj. koliki je maksimalni protok kroz taj brid, a prvi označava koliki dio kapaciteta brida je korišten te se to naziva protokom kroz taj brid. Na sljedećoj je slici prikazano kako u nekoliko koraka maksimizirati protok kroz zadanu mrežu. (Marinović, 23.)

Slika 5.: Određivanje maksimalnog protoka kroz mrežu



Izvor: Marinović, M.: Teorija grafova, seminarski rad, Fakultet elektronike i računarstva, str. 23.

Kao što je vididljivo na slici 5., povećavanje protoka provodi se postupno sve dok se protok više ne može povećati. U prvom koraku, slika 5.a, povećavan je protok kroz bridove AB, BD i DF s 0 na 6. U drugom koraku, slika 5.b, povećavan je protok kroz bridove AC, CE i EF s 0 na 3. U trećem koraku, slika 5.c, povećanje protoka je malo kompliciranije i sastoji se u tome da se protok kroz brid BD smanji za 3 te taj dio protoka preusmjeri bridovima BE i EF. Budući da sad u vrhu D postoji manjak, taj manjak nadoknađuje se dodatnim protokom kroz AC i CD. Kao što je iz ovog kratkog primjera vidljivo, rješenje ovakvog problema nije nimalo trivijalno. (Marinović, 23.). Algoritam koji efikasno rješava ovaj i slične probleme je Ford-Fulkersonov algoritam.

Potreba za određivanjem maksimalnog ukupnog protoka često se susreće u realnim transportnim problemima. Primjerice, neka je potrebno iz grada 1 u grad 2 prevesti, što je više moguće tereta, cestom za određeno vrijeme, koristeći 10 kamiona. U obzir se mora uzeti da cesta ima maksimalnu propusnost, tj. ne može svih 10 kamiona i ostali promet, koji se nalazi na cesti u tom trenutku, proći u isto vrijeme. Dakle, potrebno je računati gornju granicu tereta koju je moguće prevesti za određeno vrijeme. Pored ovog faktora postoji i gornja granica tereta koja može stati u svaki kamion i to je također faktor koji je potrebno uzeti u obzir. Navođenjem ovog primjera samo je približena važnost ovog problema te prikaz da je ovo problem kojeg je često potrebno rješavati. (Hadžialić, Korlat, 2016., 3.)

Veliki broj problema optimizacije na mrežama mogu biti svedeni na neki od karakterističnih zadataka za koje postoje razvijeni efikasni algoritmi. Za razliku od ostalih, nalaženje najkraćeg puta između dva zadana čvora, nalaženje najkraćeg puta između svaka dva čvora u mreži i K takvih puteva između 2 čvora i određivanje najkraćeg puta s unaprijed zadanim brojem čvorova, određivanje maksimalnog (i minimalnog) protoka u mreži predstavlja problem ekstremizacije protoka u mreži, dok ostali spadaju u grupu određivanja optimalnih puteva u mrežama. (Hadžialić, Korlat, 2016., 3.)

Ovaj problem je najjednostavnije promatrati kao komplementaran model problemu najkraćeg puta. Razlika je što je kod problema maksimalnog protoka protok ograničen i predstavlja određivanje maksimalne količine protoka od određenog izvora (čvora) a, do krajnjeg čvora b.

Postupak za određivanje maksimalnog protoka bi bio sljedeći:

- Transportna mreža predstavlja se crtežom tako da se tokovi ne sijeku.
- Uočava se onaj elementarni put mreže iz početnoga vrha u završni vrh, koji je na crtežu najviši. Iz mreže se izbacuje tok toga puta koji ima najmanju propusnu sposobnost. Istodobno, propusne sposobnosti preostalih tokova promatranoga puta umanjuju se za vrijednost propusne sposobnosti izbačenoga toka.
- Na opisani način dobiva se nova transportnu mrežu, na kojoj se ponovno primjenjuje opisani postupak.
- Postupak se ponavlja sve dok se ne prekinu svi putovi koji vode od ulaza do izlaza.
- U polaznoj se mreži uočavaju putevi koji su u bilo kojemu trenutku bili najviši. Tokovima svakoga takvog puta pridružuje se, kao djelomični protok, propusna sposobnost toka s minimalnom propusnom sposobnošću iz toga puta. Ukupan protok dobije se kao zbroj djelomičnih protoka. (Hadžialić, Korlat, 2016., 3.).

U principu, postoje dvije metode.za rješavanje. Jedna se odnosi na planarne mreže i to je metoda Forda i Fulkersona, a druga metoda se odnosi na neplanarne mreže. Graf je planaran ili smjestiv u ravnini ako se može nacrtati, tj. realizirati u ravnini, tako da se ivice sijeku u vrhovima. Graf koji nije planaran zove se neplanaran.

Protoci u mrežama predstavljaju jedan od najzanimljivijih ekstremalnih problema u teoriji grafova. Naime, problem određivanja optimalnog protoka u prometnim, informacijskim, komunikacijskim i drugim mrežama su samo neke od primjena.

Problem pronalaska maksimalnog toka kroz graf donekle je sličan problemu pronalaska najkraćeg puta u mreži i oba se javljaju u problemu pronalaska maksimalnog toka, minimalne cijene. Ipak, bitna razlika je ta što se u problemu nalaska maksimalnog toka mora voditi računa o gornjoj granici toka koju pojedini brid u mreži dopušta, dok se kod traženja najkraćeg puta minimizira cijena kojom se može doći do pojedinog vrha. (Bujanović, 2017., 5.)

Problem maksimalnog toka je sljedeći: u povezanoj mreži, u kojoj bridovi imaju kapacitete, potrebno je poslati maksimalnu količinu toka izmedu dva istaknuta vrha, izvora i ponora, tako da niti kod jednog brida kapacitet nije premašen.
Preciznije: Neka je dana mreža $G = (V,E)$ s nenegativnim kapacitetima u_{ij},
za svaki brid $e_{ij} = (i, j) \in E$.
Neka je $U = \max\{u_{ij} : (i, j) \in E\}$.
Tok je definiran kao broj x_{ij}, pri čemu je $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$.
Dalje, pretpostavka je da postoje dva vrha koji se zovu izvor s i ponor t. Cilj je pronaći maksimalan mogući tok od s do t tako da su zadovoljeni svi kapaciteti i zahtjevi u pojedinim vrhovima, tj. da vrijedi zakon o održanju toka u mreži. Za svaki vrh promatra se razlika toka koji izlazi i ulazi u taj vrh. Izvor s ima višak toka od f jedinica toka, dok ponor t ima manjak toka od f jedinica. Za sve ostale vrhove količina toka koji izlazi iz vrha mora biti jednaka količini toka koji ulazi u taj vrh.

Pretpostavke koje vrijede za mrežuu:

- Mreža je usmjerena.
- Svi kapaciteti su prirodni brojevi.
- U mreži ne postoji put od izvora do ponora koji prolazi samo lukovima koji imaju beskonačan kapacitet. Ova pretpostavka je bitna jer onda očito vrijednost maksimalnog toka nije odozgo omeđena.

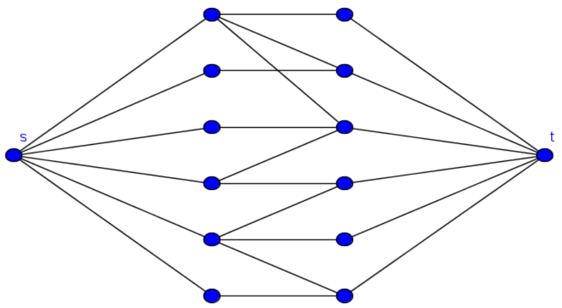
- Mreža ne sadrži paralelne lukove, odnosno, ne postoji više lukova koji direktno povezuju neka dva vrha. (Bujanović, 2017., 6.).

Usvaja se da je čvor 1 izvorni (s) a NC ponorni (t). Zadatak je pronaći maksimalan protok kroz mrežu, takav da protok kroz pojedinačne veze (x_{ij}) bude manji od kapaciteta veze (q_{ij}) ali i da materijalni bilans bude zadovoljen u svakom čvoru, što znači da je dotok u čvor jednak isticanju iz čvora. Ovo važi za svaki čvor, osim za izvorni i ponorni.
Kako je u mreži zadovoljen materijalni bilans, protok kroz mrežu f će odgovarati sumi protoka koji izlazi iz izvornog čvora ili sumi protoka koji dotiče u ponorni čvor.
(Dašić, Stanić, 2014., 29.)

Određivanja maksimalnoga ukupnog protoka je problem koji se često susreće u realnom transportu. Na primjer, kada je iz grada A u grad B, za određeno vrijeme, potrebno prevesti mrežom željezničkih pruga što je moguće više tereta. Podrazumijeva se da svaka pruga ima svoju propusnu sposobnost, tj. gornju granicu tereta koji se može po njoj prevesti za određeno vrijeme. Teret koji je dovezen u neku međustanicu mora se odmah prevesti dalje, jer ne dolazi u obzir skladištenje na međustanicama. Isto tako, u međustanicama se ne smije ukrcavati novi teret za prijevoz. Sličan se problem može opisati i na mreži drugih prometnica ili na naftovodu.

Dakle, modeli optimizacije na grafovima i mrežama predstavljaju značajnu oblast interesiranja u operacijskim istraživanjima i primijenjenoj matematici. Razlog tome su teorijski zanimljivi problemi,, koji nastaju pri formuliranju matematičkih modela za rješavanje važnih praktičnih zadataka. Pored onih koji se odnose na realne mreže, kao što su putne, električne, telekomunikacijske, računalnee i druge, postoji i čitav niz drugih problema koji se mogu formulirati kao zadaci optimizacije na grafu ili mreži. Veliki broj problema optimizacije na mrežama može se svesti na neki od karakterističnih zadataka za koje postoje razvijeni efikasni algoritmi. (http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/dragance/Knjiga1MO.pdf).

Slika 6.: Primjer mreže



Izvor: http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml07199/algoritmi-final/Transportne_mreze.html

3.1. Metoda etiketiranja

Određivanje maksimalnog toka na mreži metodom etiketiranja vrši se tako što se svakom čvoru j pridružuje se broj (δ_j, γ_j) gdje je γ_j oznaka čvora iz kojeg luk dolazi u čvor j, a δ_j je mogući tok $\delta_j > 0$. Tako etiketa (δ_j, γ_j) pridružena čvoru j pokazuje da je u smjeru od i prema j moguće propustiti tok $\delta_j \leq c_{ij}$ gdje je c_{ij} kapacitet luka (i,j).

Proces etiketiranja se nastavlja ako je ostao neki čvor k neetiketiran, prema kojem vodi jedan luk iz nekog već etiketiranog čvora. U tom slučaju čvor k dobiva etiketu (δ_k, γ_k), gdje je $\gamma_k = j$ dok je $\delta_k = \min(c_{jk}, \delta_j)$ pri čemu je c_{jk} označuje kapacitet luka (j,k). Ovdje treba primijetiti da u čvor k može voditi više lukova iz etiketiranih čvorova $j_1, j_2, \ldots$ (svakako s kapacitetima većim od nule). Tada se uzima čvor s najmanjim indeksom j, da se odredi etiketa za čvor k, tj. Piše se $\gamma_k = \min(j_r)$. To je samo jedan od načina odabiranja. Umjesto čvora s najmanjim indeksom može se uzeti i čvor sa najvećim indeksom. (Pašagić, 1998. 46.).

Proces etiketiranja završava kada se etiketa dodijeli izlazu iz mreže. Prvi broj u toj etiketi tj. δ_n, predstavlja iznos za koji ukupni tok treba povećati. Idući unatrag od izlaza prema ulazu dodaje se novi tok na lukove. Polazi se dakle od izlaza iz mreže i ide se unatrag ravnajući se po drugim brojevima u etiketama čvorova. Drugi broj γ_n etiketi izlaza upućuje na prethodni čvor, drugi broj u etiketi toga čvora na čvor koji njemu prethodi itd. (Pašagić, 1998. 46.).

Nakon toga. proces etiketiranja se obnavlja. Nakon što se nekoliko puta ponovi, proces se prekida, jer se uspjelo etiketirati samo jedan dio S_1 čvorova, a drugi dio S_2 čvorova zajedno s izlazom iz mreže nije se mogao etiketirati. Kaže se da je došlo do reza na mreži, koji ima minimalni kapacitet.

Prema Ford Fulkersonovom teoremu, maksimalni tok je postignut i jednak je kapacitetu reza (S_1,S_2). (Pašagić, 1998., 47.).

3.2. Metoda dodavanja pozitivnog toka

Postupak ovog algoritma jest da se pri nekom stanju u mreži pronađe put kojim se može poslati dodatni pozitivan tok od ishodišta prema odredištu. Taj put se naziva put dodatnog toka. (Pašagić, 1998., 43.).

Izbor čvora za put dodatnog toka se vrši na sljedeći način:
Krenuvši od izvorišta prema odredištu, izabere se čvor *j* ako dodatni pozitivni tok može biti usmjeren od ishodišta prema čvoru j. Pozitivan tok moći će se usmjeriti prema čvoru *j* ako je ispunjen jedan od ovih uvjeta:

1. Grana (i,j) je izlazna grana iz čvora i, a tok u (i,j) manji je od kapaciteta $c_{i,j}$.
2. Grana (i,j) je ulazna grana za čvor i (smjer od j prema i), a postoji tok u (j,i).

(Pašagić, 1998., 43.).

Izbor čvorova za put dodatnog toka završava izborom odredišta. Nakon što se kroz mrežu propusti dodatni tok, koji odgovara najvećem toku koji put dodatnog toka može propustiti, pokušava se pronaći novi put dodatnog toka. Postupak se završava kad više ne može biti pronađen niti jedan put dodatnog toka. (Pašagić, 1998., 43.).

4. FORD – FULKERSONOV ALGORITAM (TEOREM)

Najpoznatiji algoritam za pronalaženje maksimalnog toka je Ford-Fulkersonov algoritam, kojeg su 1956. godine objavili L. R. Ford i D. R. Fulkerson. Ford-Fulkersonov algoritam koristi tehniku pretraživanja u širinu (eng. *breath-firstsearch*, BFS) kako bi pronašao put od izvora do ponora. (Bujanović, 2017., 9.).

Ako transportna mreža sadrži bar jedan presjek konačnog kapaciteta, maksimalna vrijednost ukupnog protoka kroz transportnu mrežu jednaka je minimalnom kapacitetu presjeka mreže. (Pašagić, 2003., 202.).

Ovaj algoritam se temelji na teoremu Ford-Fulkersona da je za svaku mrežu količina maksimalnog toka jednaka kapacitetu minimalnog reza. Taj teorem često se navodi kao „maksimalni tok – minimalni rez". (Pašagić, 1998., 42.).

4.1. Lester Randolph Ford Junior.

Lester Randolph Ford Jr[5]. (23. rujna 1927. - 26. veljače 2017.) bio je američki matematičar specijaliziran za probleme s mrežnim tokovima. Bio je sin matematičara Lester R. Ford Sr.. Fordov rad s D. R. Fulkersonom o maksimalnom problemu protoka i Ford-Fulkersonovom algoritmu za njegovo rješavanje, koji je objavljen kao tehničko izvješće 1954. i u časopisu 1956. godine, utvrdio je minimalni teorem maksimalnog protoka. Ford je također razvio Bellman-Fordov algoritam za pronalaženje najkraćih staza u grafikonima koji imaju negativno ponderirani rub. (https://en.wikipedia.org/wiki/L._R._Ford_Jr.).

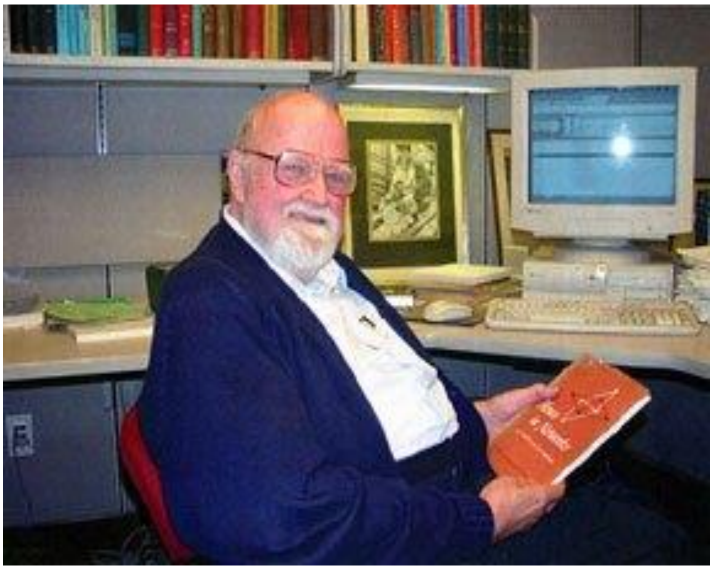
Lester Randolph Ford Jr. jedan je od pionira u području tokova programiranja na grafikonima. Ford Sr. i Ford Jr. su suautori *Automorphic Functions*[6], koje je 1963. objavio McGraw-Hill. Dok je radio u tvrtki *Rand corporation*, Ford Jr. objavio je brojne članke koji nisu samo uspostavili temelje mrežnih tokova, već i buduća istraživanja na ovom području.

[5] Junior - mlađi
[6] Automorfne funkcije.

Godine 1962. *Priceton University Press* objavio je knjigu *Flow in Networks*[7] sa D. R. Fulkersonom kao koautorom. Ova knjiga objedinjuje njegov rad na mrežama. Zajedno s Richardom E. Bellmanom[8] razvio je algoritam "korekcije naljepnica".

Većina Fordova rada obavljena je u suradnji s Fulkersonom, očito su njih dvojica napravila dobru suradnju. Međutim, 1956. godine predstavio je nekoliko članaka koje je potpisao sam. Autor je nekoliko algoritama koji se koriste za rješavanje većine problema s grafovima. (https://angelberh7.wordpress.com/2014/10/08/biografia-de-lester-randolph-ford-jr/)

Slika 7.: Lester Randolph Ford Jr.



Izvor: https://angelberh7.wordpress.com/2014/10/08/biografia-de-lester-randolph-ford-jr/

Nastavljajući stopama svog oca, Ford Jr. davao je temelje gotovo svih istraživanja u mrežnim tokovima. Ford i Fulkerson (1956.) riješili su problem maksimalnog protoka povećavajući algoritme puta. Ford i Fulkerson (1962.) proučavaju svojstva generičkih algoritama za ispravljanje naljepnica. (http://web.archive.org/web/20071123094334/http://www.geocities.com/nayan_vt/lester_randolph_ford1.htm).

[7] Tijek mreža.

[8] Američki primijenjeni matematičar, 26. kolovoza 1920. - 19. ožujka 1984.

Ostavio je velik trag u rješavanju problema s grafovima te se njegov i Fulkersonov teorem može primijeniti u širokom spektru praktičnih problema.

4.2. Delbert Ray Fulkerson

Rođen je 14. kolooza 1924. u Illionisu, a preminuo 10. siječnja 1976. u New Yorku. Bio je američki matematičar koji je, s Fordom, razvio Ford-Fulkersonov algoritam, jedan od najpoznatijih algoritama za rješavanje problema največeg protoka u mrežama. D. R. Fulkerson je rođen u Tammsu, Illinois, treći od šestero djece Elberta i Emme Fulkerson. Fulkerson je postao preddiplomant na Sveučilištu *Southern Illinois*. Njegova akademska karijera prekinuta je vojnom službom tijekom Drugog svjetskog rata.
Nakon rata vratio se na studij matematike na Sveučilištu *Wisconsin-Madison*. (https://en.wikipedia.org/wiki/D._R._Fulkerson).

Godine 1951., nakon završetka doktorskog rada, Ray se pridružio matematičkom odjelu tvrtke Rand. Tamo je započeo slavnu karijeru istraživanja. Ray je napustio Rand 1971. i došao u Cornell[9] kao profesor inženjerstva. Ostao je u Cornellu do svoje smrti 1976. godine.

Slika 8.: Delbert Ray Fulkerson

Izvor: http://www.orie.cornell.edu/news/seminars/fulkerson-bio.cf

[9] Sveučilište Cornell u New Yorku, Ithaca, osnovano 1865. god.

Ray-ova prva tri objavljena rada već su utvrdila njegovu važnost u rastućem polju Operacijskih istraživanja. Prvi rad, s Georgeom Dantzigom[10], riješio je problem raspoređivanja teretnih brodova, a još se uvijek koristi na preddiplomskom i diplomskom studiju kao primjer primjenjivosti mrežnih modela. Njegov drugi rad, s Georgeom Dantzigom i Selmerom Johnsonom[11], bio je „računalna turneja", s obzirom na primitivno stanje računala početkom pedesetih godina. Čitavo područje poliedarske kombinatorike na kraju se pojavilo iz ovog rada i postavilo „pozornicu" za uspješne računalne pristupe velikim problemima optimizacije.

Treći rad, s L. R. Fordom, Jr. bio je prvi u dugoj suradnji u kojoj su Ford i Fulkerson postavili temelje teorije mrežnih tokova. Kasniji članak s Fordom prvi je put predstavio tehniku generacije stupova i nadahnuo razvoj linearnog programiranja velikih razmjera. Tijekom svoje karijere Ray je nastavio stvarati temeljne doprinose u tim područjima, kao i u teoriji grafova i kombinacijskoj matematici, kojima se rješavaju mnogi problemi. (http://www.orie.cornell.edu/news/seminars/fulkerson-bio.cfm).

4.3. Prikaz Ford-Fulkersonovog teorema

Ford-Fulkersonov algoritam pronalazi maksimalni protok kroz zadanu mrežu. Algoritam se provodi u nizu koraka te se u svakom koraku povećava ukupni protok u mreži, sve dok ne dostigne maksimum. (Hadžialić, Korlat, 2016., 5.).

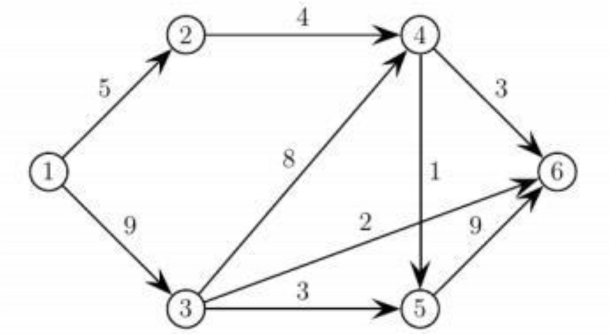
Ideja algoritma je pronaći u grafu put koji povećava trenutni protok i tada promijeniti protok po granama tog puta te tako povećati ukupni protok. Kad više nije moguće pronaći put koji bi poboljšao protok algoritam se završava. U samom algoritmu nije specificirano kako pronaći put koji poboljšava protok, a to znači da bilo koji postupak pronalaženja tog puta daje ispravno rješenje. Međutim, broj koraka u kojem se postiže rješenje uvelike ovisi o načinu pronalaženja takvog puta.

[10] Američki matematički znanstvenik koji je napravio važan doprinos istraživanju operacija, računalnih znanosti, ekonomije i statistike, (1914.-2005.).
[11] Američki matematičar, (1916. – 1996.).

Na slici br. 9. data je struktura jedne mreže gdje brojevi iznad linkova označavaju kapacitet svakog linka. Potrebno je odrediti maksimalni protok između čvorova 1 i 6.

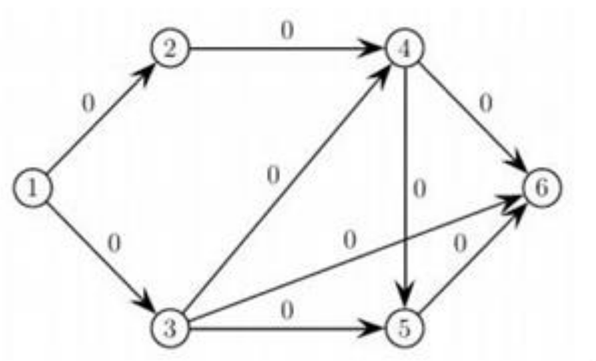
Rješenje se pronalazi na način da se kreće bez ijednog toka (označeno nulama iznad svakog linka u mreži), što je prikazano sa Slici 10. (Hadžialić, Korlat, 2016., 5.).

Slika 9.: Prikaz mreže s označenim kapacitetima



Izvor: Hadžialić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 6. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

Slika 10.: Korak 1. – mreža bez ijedne rute

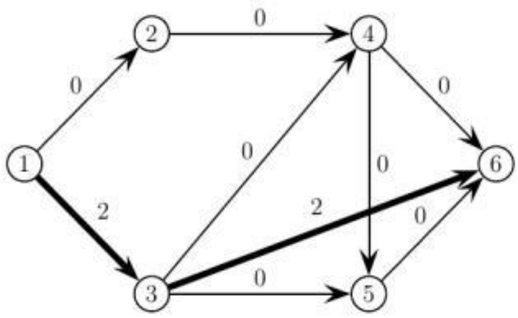


Izvor: Hadžialić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 5. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

Sljedeći korak predstavlja biranje putanje izmedu čvora 1 i 6. Za početak je izabrana putanja 1 → 3 → 6. Sljedeći korak predstavlja određivanje vrijednosti protoka koji se može poslati datom rutom. Pošto se radi o serijskoj vezi, maksimalni protok koji se može poslati jednak je najmanjem kapacitetu linka u datoj putanji. Link 3 → 6 ima kapacitet 2, odakle se zaključuje da je moguće poslati 2 jedinice rutom 1 → 3 → 6. Ovo je prikazano Slikom 11. (Hadžialić, Korlat, 2016., 6.).

Ovdje treba uvesti još jedan pojam, tzv. povećavajuća putanja. U prethodnom slučaju ruta 1 → 3 → 6 predstavlja povećavajuću putanju, jer je vrijednost protoka koji prolazi rutom različit od nule. Ukoliko za sve moguće putanje od izvorišnog do odredišnog čvora vrijedi da je vrijednost protoka nula, odnosno da ne postoji više ruta kroz koje je moguće naći vrijednost protoka različitih od nule, tada protok više nije moguće povećavati i dobiveni protok predstavlja maksimalni protok kroz mrežu izmedu promatrana dva čvora. (Hadžialić, Korlat, 2016., 7.)

Slika 11.: Korak 2. - ruta 1-3-6



Izvor: Hadžiačić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 5. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

Dalje se nastavlja tako što se ponavlja prethodni korak. Uzima se sljedeća ruta 1 → 3 → 5 → 6. Analogno prethodnom koraku, maksimalna vrijednost protoka koja se može propustiti kroz ovu rutu iznosi 3 jedinice.

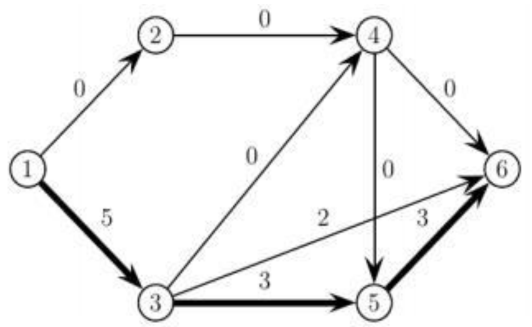
Na slici 12. je prikazana 1 → 3 → 5 → 6. U tablici 1. prikazani su do sada korišteni linkovi, njihov kapacitet, trenutno opterećenje i ostatak od kapaciteta, koji se može iskoristiti za novu rutu.

Tablica 1.: Prikaz linkova

Link	Ukupni kapacitet	Trenutno opterećenje	Ostatak kapaciteta (rezerva)
1->3	9	2	7
3->5	3	0	3
5->6	9	0	9

Izvor: Hadžialić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 7. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

Slika 12.: Ruta 1 → 3 → 5 → 6



Izvor: Hadžialić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 8. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

Dalje, uzima se sljedeća ruta 1 → 2 → 4 → 6. Maksimalni protok kroz ovu rutu iznosi 3. Uzima se sljedeća ruta 1 → 2 → 4 → 5 → 6. Promatrajući kapacitete linkova na ruti (uzimajući u obzir ostatak od iskorištenog kapaciteta na već prethodno korištenim linkovima) zaključuje se da se ovom rutom može propustiti 1 jedinica. Radi lakšeg računanja ovo je prikazano tablicom 2. (Hadžialić, Korlat, 2016., 8.).

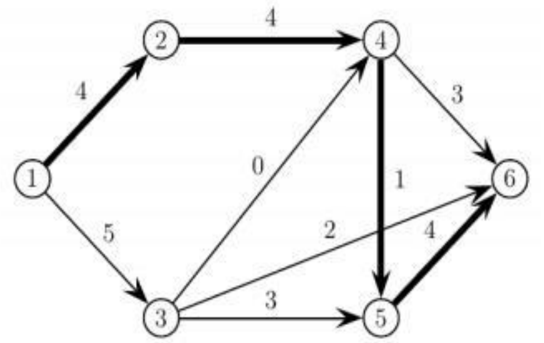
Tablica 2. Prikaz linkova rute 1 → 2 → 4 → 5 → 6

Link	Ukupni kapacitet	Trenutno opterećenje	Ostatak kapaciteta (rezerva)
1->2	5	3	2
2->4	4	3	1
4->5	1	0	1
5->6	9	3	6

Izvor: Hadžiačić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 8. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

Na slici 13. je prikazan tok na ruti 1 → 2 → 4 → 5 → 6. Ako se sada pogleda čvor 6 te iznosi protoka primljenih na tom čvoru, od čvorova 5, 3 i 4 lako se dolazi do ukupnog primljenog protoka na čvoru 6 od čvora 1 (jer su svi tokovi poslani sa čvora 1) koji iznosi 9 (4 + 3 + 2). Ovim je algoritam završen. (Hadžialić, Korlat, 2016., 7.).

Slika 13.: Tok na ruti 1 → 2 → 4 → 5 → 6



Izvor: Hadžialić, S., Korlat, A.: Maksimalan protok, seminarski rad, Fakultet za saobraćaj i komunikacije u Sarajevu, 2016., str. 8. https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok

5. MODELIRANJE PROMETA

Projektiranje horizontalnog i vertikalnog toka trase te određivanje poprečnih elemenata bilo koje cestovne prometnice temelji se na kapacitativnoj analizi njenih pojedinih elemenata. Svrha kapacitativne analize je u tome da se osigura da cestovna mreža može primiti postojeće i planirano prometno opterećenje, uz zadovoljavajuću kvalitetu odvijanja prometnih tokova, što podrazumijeva slobodu kretanja, brzinu i vrijeme prolaza, sigurnost i udobnost vožnje. Navedene mjere efikasnosti definiraju razinu usluge za prevladavajuće uvjete prometa i prometnice.

U uobičajenim analizama efikasnosti transportnog sustava sama procjena kapaciteta nije presudni činitelj ocjene funkcioniranja sustava već je to prosječno zakašnjenje po vozilu, međutim, svi modeli proračunavaju zakašnjenje i ostale mjere efikasnosti sistema na temelju ustanovljenog kapaciteta. (Cvitanović, 48.).

5.1. Prometni tok

Prometni tok je istodobno kretanje više prometnih entiteta (automobila, vlakova, pješaka..) na prometnoj infrastrukturi (cesti, željezničkoj pruzi, pješačkim stazama..) prema određenim zakonitostima. Teorija prometnog toka mlada je znanstvena disciplina. Kao početak razvoja teorije prometnog toka navodi se 1930. godina, a vezano je uz primjenu teorije vjerojatnosti u opisivanju određenih karakteristika prometnog toka i za usavršavanje prvih matematičkih modela za opisivanje relacija “tok-brzina”. Nakon 1950. godine zamijećen je snažan impuls u razvoju ove znanstvene discipline, kada su razvijene metode opisivanja zakonitosti u prometnom toku, osnovane na temeljima matematičkog modeliranja.

Prometni tok je istovremeno kretanje više vozila na putu u određenom poretku. Za opisivanje prometnih tokova i zakonitosti kretanja motornih vozila u prometnim tokovima, na cestovnim prometnicama, neophodno je definirati pokazatelje. Ti se pokazatelji, u teoriji prometnog toka, nazivaju osnovni parametri prometnog toka ili osnovne veličine prometnog toka. Osnovna razlika u uvjetima kretanja vozila u prometnim tokovima u odnosu na uvjete kretanja pojedinačnog vozila je što u prometnom toku na kretanje vozila djeluje i međusobna interakcija vozila. Glavni pokazatelji za opisivanje prometnih tokova su:

- protok vozila, q
- gustoća prometnog toka, g
- brzina prometnog toka, v
- vrijeme putovanja vozila u toku t
- jedinično vrijeme putovanja vozila u toku
- vremenski interval slijeđenja vozila u toku
- razmak slijeđenja vozila u toku

Pod pojmom protok vozila podrazumijeva se broj vozila koja prođu kroz promatrani presjek prometnice u jedinici vremena, u jednom smjeru, za jednosmjerne prometnice ili u oba smjera za dvosmjerne prometnice.

Pod pojmom gustoća prometnog toka podrazumijeva se broj vozila na jedinicu duljine prometnice, po prometnoj traci, po smjerovima za jednosmjerne prometnice, odnosno u oba smjera za dvosmjerne prometnice. Pojam gustoće vezan je prostorno za odsjek ili prometnu dionicu, a vremenski za trenutno stanje.

Pod pojmom brzine toka eksplicitno se misli na određenu srednju vrijednost brzina svih vozila koja sudjeluju u promatranom prometnom toku.

Interval slijeđenja vozila u prometnom toku predstavlja vrijeme između prolaska dva uzastopna vozila kroz zamišljeni presjek promatranog odsjeka puta (čeoni prolazak vozila).

Razmak slijeđenja vozila predstavlja prostorni razmak između dva uzastopna vozila u prometnom toku i najčešće se označava sa Sh, a izražava u metrima.

Sa stajališta realnih prometnih tokova na odsjeku puta razmak u praćenju predstavlja srednju vrijednost svih razmaka praćenja između uzastopnih vozila u određenom toku na promatranom odsjeku ili dionici puta. (Dadić, Kos, Ševrović, 2014., 21.)

5.2. Propusna moć (kapacitet) prometnice

Odnos toka i kapaciteta ukazuje koliki dio kapaciteta je iskorišten sadašnjim ili planiranim opterećenjem, koristi se kao mjera dostatnosti postojećeg ili planiranog kapaciteta.

(http://estudent.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove_prometnog_inzenjerstva/Materijali/PROMETNI_TOK_2012.pdf).

Za označavanje pojma propusne moći prometne trake koristi se simbol C0, za pojam brzine pri osnovnoj propusnoj moći VC0 i za pojam gustoće pri osnovnom kapacitetu gC0. Vrijednost osnovne propusne moći prometne trake C0 predstavlja repernu veličinu prema kojoj su, na današnjoj razini spoznaje u teoriji prometnog toka, utvrđeni svi utjecaji konkretnih karakteristika prometne trake i prometnog toka na propusnu moć prometne trake u realnim uvjetima. Ova vrijednost ugrađena je u sve svjetski poznate obrasce pomoću kojih se izračunava praktična propusna moć prometne dionice – odsjeka ceste. (Dadić, Kos, Ševrović, 2014., 73.)

U najširem smislu, kapacitet ili propusna moć prometnice je mjera njene sposobnosti za prihvat toka vozila u kretanju. Riječ je o odnosu, a ne količini, i ne može se direktno usporediti s kapacitetom zatvorenog prostora. Sav protok (uključujući maksimalni kapacitet) prometnice pod utjecajem je većeg broja faktora: kolnika, karakteristika rada vozila, kontrole rada i elementa okoliša. Međutim, osnovna jedinica je sam vozač i ukupnost odluka koje grupa vozača donosi u određenim cestovnim, prometnim i uvjetima okoliša. Tako propusna moć ceste uvelike varira, budući da odluke koje donose pojedinci iz bilo koje grupe vozača, a čak i isti pojedinac, u dva vremenska perioda neće biti identična. Ova karakteristika promjenjivosti otežava kombiniranje procjene kapaciteta iz različitih zemalja. Iako su koncepcije slične, određene vrijednosti se značajno razlikuju uslijed razlika u ponašanju vozača. Termin „kapacitet ceste“ ima dvojako značenje: šire i uže. U širem smislu riječ je o skraćenici za „kapacitet ceste i razine usluge“, koja komplementarno pokriva osobine prometa na cesti od malog do maksimalnog obujma. U određenom smislu, isti se izraz odnosi na maksimalni broj vozila za koji se može očekivati da ga cesta primi u danim uvjetima. Pod idealnim cestovnim i uvjetima okoliša i s najhomogenijom skupinom vozača i vozila koja se može naći u normalnoj situaciji, kapacitet jedne trake je oko 2400 vozila na sat. Taj kapacitet daju prosječni intervali slijeđenja od 1,5 sekundi. Takvi prosječni intervali bili su promatrani u kratkim periodima, a rijetko za čitav jedan sat u centralnim trakama ceste izgrađene po najvišim standardima. Kombinacija okolnosti koja omogućava tako visoku stopu protoka izuzetno je rijetka, a ako i nastane, rezultirat će vrlo nestabilnom situacijom, stoga se takva rijetko postignuta vrijednost rijetko koristi u proračunima. Radije se koristi kao apsolutna gornja granica stope propusne moći. (Biondić, 2016., 8.).

Poznavanje propusne moći C [voz/h] polazni je preduvjet za donošenje bitnih inženjersko-studijskih zaključaka, a treba istaknuti:

- da je propusna moć bitan parametar pri usporedbi varijanata i odabiru najpovoljnijeg rješenja, a sve rekonstrukcije zahtijevaju provjeru propusne moći,
- da se projektni elementi nove ceste pretežito zasnivaju na usporedbi prognoziranih prometnih potreba i propusne moći ceste,
- da se nedostatci postojeće cestovne mreže mogu kvalitetno provjeriti usporedbom prometnog opterećenja i propusne moći pojedinih cestovnih pravaca.

Pri određivanju propusne moći ceste polazi se od propusne moći jednoga prometnog traka.

Propusna moć C ceste na jednom prometnom traku u broju vozila za jedan sat predočena je jednadžbom:

$$C = \frac{60 \text{ x } 60 \text{ x v}}{a} = \frac{3.600 \text{ x V}}{3{,}6 \text{ x } a} = \frac{1.000 \text{ x V}}{a} \quad [\frac{voz}{h}]$$

u kojoj je:

C – propusna moć prometnog traka [voz/h]

v – brzina vožnje vozila [m/s]

V – brzina vožnje vozila [km/h]

a – sigurnosni razmak između vozila u kretanju [m].

Takav način proračuna propusne moći C bio bi moguć samo ako je prometni tok homogen, tj. ako su sva vozila u prometnom traku jednakih tehničkih svojstava, ako svi vozači imaju iste psihofizičke značajke i ako su na svim dijelovima ceste osigurani jednaki uvjeti vožnje. Budući da je takav prometni tok u stvarnosti ne postoji, pri proračunu propusne moći koriste se jednadžbe dobivene na temelju suvremenog prometnog toka, uzimajući u obzir širinu prometnog traka, udaljenost bočne smetnje, vidljivosti, sigurnosti, udobnosti, čimbenik vršnog sata, tehničke elemente ceste, strukturu prometa i sl. Danas u svijetu postoje različite metode za proračun propusne moći ceste. (Biondić, 2016., 8.).

Kapacitet je maksimalan broj vozila koji može proći kroz promatrani presjek ceste ili traka u jedinici vremena pri prevladavajućim uvjetima prometa i prometnice. (Cvitanović, 48.).

Kapacitet je maksimalan broj vozila koji se može očekivati da će proći presjekom ili uniformnom dionicom ceste ili trakom. u određenom vremenskom razdoblju, pod prevladavajućim uvjetima prometnice, prometa i kontrole prometa. Prometni uvjeti odnose se na strukturu prometa (teška vozila, autobusi, osobna vozila) kao i na razdiobu manevara skretanja na raskrižjima te vremenske promjene potražnje izražene npr. faktorom vršnog sata. Uvjeti prometnice se odnose na geometrijske karakteristike određene vrste prometnice kao što su broj i namjena trakova, širina trakova i udaljenost bočnih smetnji, horizontalni tok i uzdužni nagibi. Uvjeti kontrole prometa se odnose na način vođenja isprekidanih prometnih tokova: semafori, znak sporedne ceste, stop znak... (Cvitanović, 54.).
Kapacitet je izražen u vozilima ili osobama, koje može u određenom vremenskom razdoblju proći određenim presjekom traka ili ceste u prevladavajućim uvjetima odvijanja prometnog toka.

Kapacitet se definira za različite prevladavajuće uvjete (razinu usluge) i predstavlja fiksnu, brojčanu vrijednost. Za definiranje kapaciteta sve metodologije koriste koncept idealnog kapaciteta. Stvarni kapacitet (za određenu razinu usluge) dobije se smanjenjem vrijednosti idealnog kapaciteta, koje je uvjetovano razlikom stvarnih od idealnih uvjeta, što se koncepcijski može zapisati kao: C = Ci*f1*f2*f3*…*fi.

- C je kapacitet za određenu razinu usluge, odnosno prevladavajuće uvjete
- Ci je idealni kapacitet
- fi su faktori prilagođavanja kapaciteta za prevladavajuće uvjete

Za različite vrste prometnica definiraju se različiti idealni uvjeti te različiti faktori korekcije idealnog kapaciteta. (Cvitanović, 54.).

Glavna svrha proračuna kapaciteta je procijeniti najveći broj vozila ili ljudi koje analizirani prometni objekt može prihvatiti uz zajamčeni stupanj sigurnosti u određenom vremenskom periodu. (Novačko, Pilko, 2017., 1.).

Prva teorijska razmatranja zakonitosti kretanja vozila i propusne moći polazila su od pretpostavke da se prometni tok ponaša kao fluid, tj. da je homogen. Osnovna zakonitost prometnog homogenog toka:

$$Q = G \cdot V \; [\frac{voz}{h}], \text{ odnosno } G = \frac{Q}{V} \; [\frac{voz}{km}]$$

Q – protok vozila, $[\frac{voz}{h}]$

G – gustoća prometnog toka, $[\frac{voz}{km}]$

V – brzina prometnog toka, $[\frac{voz}{h}]$.

Gustoća prometa predstavlja ukupan broj vozila koja se u trenutku promatranja nalaze na određenom odsječku (duljini) ceste i označava mjerilo za određivanje stvarne iskorištenosti propusne moći na određenoj cesti. Gustoća prometa praktički se dobiva brojanjem vozila vizualno ili s pomoću posebnih uređaja. Pri određivanju propusne moći prometnice polazi se od propusne moći jednoga prometnog traka. (Šangulin, 2015., 17.).

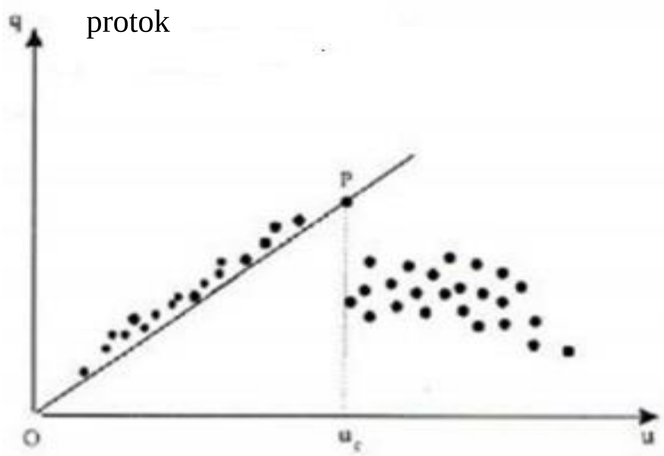
5.3. Maksimalni protok u cestovnim mrežama s kapacitetom koji ovisi o brzini; primjer Bangkok

S obzirom da je u Hrvatskoj iznimno malo literature o temi ovog rada te primjeri izračuna gotovo i ne postoje, prije izračuna u gradu Rijeci, bit će ukratko prikazan primjer ulaznih podataka za korištenje Ford-Fulkersonovog teorema na primjeru grada Bangkoka. Promijenjeni Ford-Fulkersonov algoritam koristi se za procjenu maksimalnog protoka prometa kroz odabranu mrežu cesta u Bangkoku.

U mnogim gradovima prometne gužve predstavljaju veliki problem. Postoje mnogi pokušaji da se pokuša poboljšati dizajn ceste i prometa s detaljnim empirijskim mjerenjima prometa, analizama prometnih nesreća, analizama "crnih točaka", revizijom prometnih zakona i metoda izvršenja, uključujući fiziku, matematičko modeliranje i računalnu simulaciju. Ford-Fulkersonov algoritam je dobro poznata metoda teorije grafikona za izračunavanje maksimuma protoka kroz mreže. U cestovnoj mreži, kapacitet je funkcija brzine ili gustoće prometa. (Prema: Kichainukon, Moore, Phalavonk, 2013., 489.).

Na slici 14. prikazana su mjerenja, koja pokazuju da se protok prometa povećavao otprilike linearno kao gustoća, sve do kritične gustoće. Pri kritičnoj gustoći, protok na cesti bio je maksimalan i može ga se smatrati maksimalnim kapacitetom ceste. Kako se gustoća povećala iznad ove kritične točke, došlo je do velikog smanjenja kapaciteta ceste i prometnog toka. Kapacitet ceste nastavio se smanjivati kako se povećava gustoća te lako dolazi do gužve. Područje ispod kritične gustoće odgovara "regiji slobodnog protoka", gdje je prometni tok manji od kapaciteta ceste, dok područje iznad kritična gustoće odgovara "zagušenom području protoka", u kojem je protok ograničen kapacitetom ceste. Kapacitet ceste stoga nije konstanta. (Prema: Kichainukon, Moore, Phalavonk, 2013., 489.).

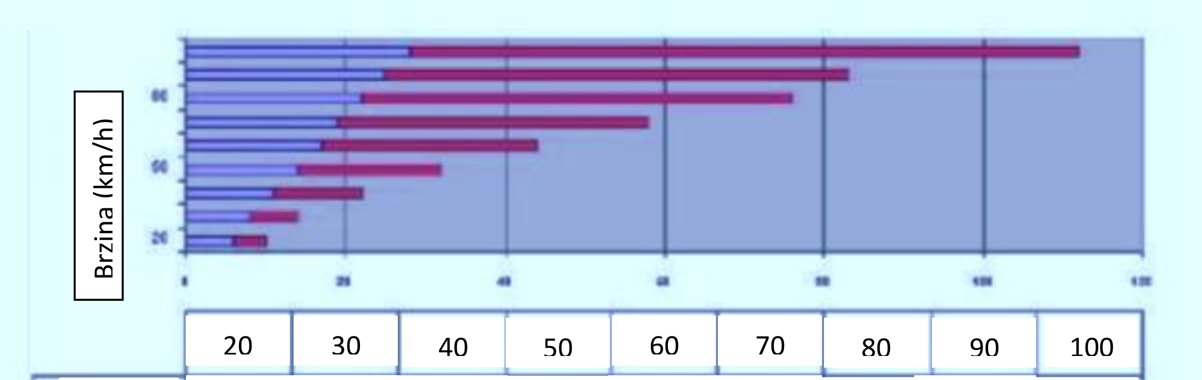
Slika 14.: Eksperimentalna mjerenja protoka prometa



Izvor: Prema: Kichainukon, W., Moore, E., Phalavonk, U.: Maximum flow in road networks with speed-dependent capacities – application to Bangkok traffic / Songklanakarin J. Sci. Technol. 35 (4), 489-499, 2013., 489., http://rdo.psu.ac.th/sjstweb/journal/35-4/35-4-15.pdf

Procjena cestovnih kapaciteta u funkciji brzine je težak problem zbog različitih vrsta vozila na cesti i različitih vozačkih navika vozača. Procjenjivani su cestovni kapaciteti kao funkcija brzine, pomoću podataka o sigurnom odvajanju automobila. Podatci koji daju sigurne zaustavne udaljenosti u funkciji brzine prikazani su na slici 15.

Slika 15.: Sigurne zaustavne udaljenosti za automobile (prilagođeno od Toyote, 2009.)



	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Nakon	3,9	6	11	18	27	39	54	68	84
Prije	6	8	11	14	17	19	22	26	28

Izvor: Prema: Kichainukon, W., Moore, E., Phalavonk, U.: Maximum flow in road networkswith speed-dependent capacities, 35 (4), 489-499, 2013., 489., http://rdo.psu.ac.th/sjstweb/journal/35-4/35-4-15.pdf

Zaustavna udaljenost uključuje dvije udaljenosti. Prva udaljenost procjenjuje se kao udaljenost koju će automobil proći u vrijemenu koje je potrebmo vozaču da vidi opasnost i pritisne kočnicu. Ovo vrijeme reakcije se uzima kao otprilike jedna sekunda. Druga udaljenost je udaljenost koju će vozilo prijeći, nakon što vozač primijeni kočnice.
(Prema: Kichainukon, Moore, Phalavonk, 2013., 489.).

Nakon izračuna pomoću Ford-Fulkersonovog teorema rezultati su pokazali da maksimalno siguran protok ceste nastaje kada sva vozila održavaju istu brzinu od oko 30 km/h. Pri brzinama iznad ove vrijednosti, maksimalni protok se povećava dok se brzina smanjuje i promet se odvija nesmetano. Ispod 30 km/h maksimalni protok brzo se smanjuje dok se brzina smanjuje i mogu se lako javiti prometne gužve. Postoje faktori koji nisu uključeni u proračunu, ali u korištenju Ford-Fulkersonovog teorema nisu potrebni jer je važno izračunati kapacitet, a kapacitet se računa u optimalnom prometnom toku, dok se koeficijenti pojedinih učinaka mogu naknadno koristiti. Ti učinci mogu biti npr. učinci automobila koji se kreću različitim brzinama te mijenjanje traka. Također, nije uključen učinak da se cestovni kapaciteti u određenoj brzini mogu povećati ako vozači održavaju manje od preporučene sigurne udaljenosti itd. Neuključeni učinci mogu smanjiti cestovne kapacitete i povećati rizik od nesreća. (Prema: Kichainukon, Moore, Phalavonk, 2013., 494.).

6. IZRAČUN KAPACITETA IZABRANIH ULICA U GRADU RIJECI POMOĆU FORD-FULKERSONOVOG TEOREMA

6.1. Izračun kapaciteta

U nastavku rada prikazane su ulice u gradu u Rijeci, u kojima je izračunat kapacitet svake ulice. Ulice koje su u mreži:

- Forella la Guardije
- Pomerio
- Žrtava fašizma
- Krešimirova
- Žabica
- Riva
- Ciottina
- Jadranki trg
- Zadarska
- Ivana Zajca

Kapacitet je izračunat prema sljedećoj formuli:

$$C = \frac{60 \text{ x } 60 \text{ x v}}{a} = \frac{3.600 \text{ x V}}{3{,}6 \text{ x } a} = \frac{1.000 \text{ x V}}{a} \quad [\frac{voz}{h}]$$

V – brzina izražena u km/h iznosi 40 km/h

v - brzina izražena u m/s iznosi 11,11 m/s (km/h : 3,6 = m/sec = 40 : 3,6 = 11,11 m/s)

a - sigurnosni razmak između vozila u kretanju iznosi 22,22 m/s

Vozač je dužan vozilo u prometu držati na potrebnom razmaku kako bi mogao zaustaviti svoje vozilo u svakom trenutku. Kada bi sva vozila u nizu bila iste vrste, tehničkog stanja i brzine, razmak među njima odgovarao bi dužini puta reagiranja vozača. Kako je u prometu vrlo česta raznovrsnost, ove razlike se moraju uvažavati kod određenja potrebnog razmaka. Razmak zaustavljenih vozila iznosi 1-2 m. Za razmak vozila u pokretu, jako je bitna brzina kretanja kao i razlika brzina i način usporenja. Ako se prednje vozilo kretalo manjom brzinom pa ga se sustizalo, a dođe li do naglog usporenja, uz dužinu puta reakcije treba dodati i put kočenja, da bi se moglo zaustaviti bez naleta na to vozilo. U naselju u kojem je brzina limitirana a pozornost veća, minimalan razmak okvirno je 1 sec ili 1/3 brzine Kako se u nepovoljnim uvjetima teže uočavaju okolnosti, a vozač često reagira sa zakašnjenjem i koči intenzivnije, iz sigurnosnih razloga razmak treba povećati za gradske uvjete na 2 sec., a izvan grada na 3 sec. Zbog složenosti točnih fizikalnih formula, za vozače je praktičnije koristiti empirijske, kojima se lakše koristiti, a ipak daju korisne podatke:

- m/sec= km/h :10 x 3
- km/h : 3,6= m/sec

(http://autoskola-chill.hr/razmak-izmedu-vozila-u-prometu/)

Prema navedenim podatcima, koji kažu da je minimalan razmak oko 1 s ili 1/3 brzine, a da je u nepovoljnim uvjetima potrebno, zbog sigurnosti, povećati razmak na 2 s, u radu je uzet razmak od 2 sekunde. Prema navedenoj formuli, sigurnosti razmak od 2 s, pri brzini od 40 km/h iznosi 22,22 m/s. (40 : 3,6 = 11,11 x 2 = 22,22 m/s).

Uvrstimo li u formulu dobivene iznose kapacitet iznosi 1800 voz/h

$$C = \frac{60 \text{ x } 60 \text{ x } 11{,}11}{22{,}22} = \frac{3.600 \text{ x } 40}{3{,}6 \text{ x } 22{,}22} = \frac{1.000 \text{ x } 40}{22{,}22} \quad [\frac{voz}{h}]$$

$$C = 1800 = 1800 = 1800 \quad \text{voz/h}$$

Uvrsti li se u formulu sigurnosna udaljenost od 1 sekunde, prema istoj formuli kapacitet iznosi 3600 voz/h. S obzirom da je udaljenost od 1 s minimalna i da u Rijeci često nastaju nepovoljni uvjeti za vožnju, u radu je uzet kapacitet od 2 s, koji se uzima pri nepovoljnijim uvjetima. Česte obilne kiše, izlijetanje šahti i potreba za što većom sigurnoću povećavaju potrebu za većom sigurnosnom udaljenošću. Zbog nedovoljne udaljenosti i učestalih nepovoljnih uvjeta česti su naleti na vozilo ispred. Kako je već dokazano na primjeru Bangoka, pri većoj gustoći se kapacitet povećava do kritične točke te se onda smanjuje. Pri manjoj udaljenosti između automobila veći je kapacitet, ali on se nakon određenog vremena smanjuje, nastaju gužve i manja protočnost. Zbog bolje razine usluge i zbog veće sigurnosti bolja je što veća sigurnosna udaljenost, nema gužvi, kapacitet se, nakon određenog trenutka, povećava i vožnja je sigurnija.

I drugi izvori potvrđuju potreban razmak od 2 s.

Neformalna pravila govore o sigurnosnim razmacima u raznim uvjetima vožnje:

- Pravilo dvije sekunde

Na suhoj cesti odbroji se do dva i pozicionira svoj automobil tako da je na udaljenosti od dvije sekunde. Najbolje je tu metodu primijeniti kada vozilo ispred prolazi uz neki znak ili neki dio na cesti gdje će se moći mjeriti pozicija automobila.

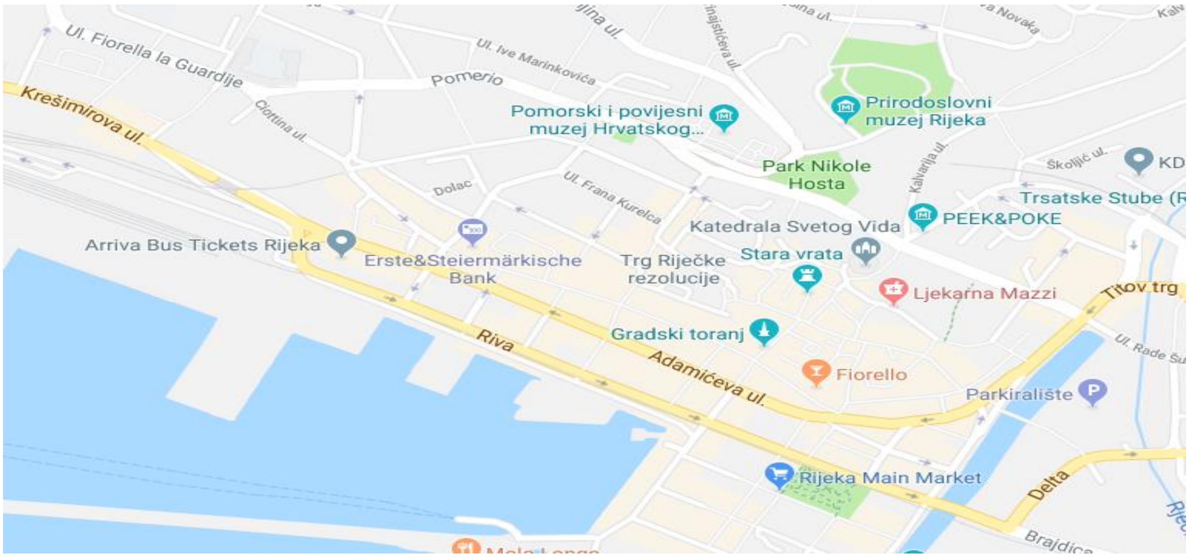
- Pravilo četiri sekunde

Sve je isto kao i kod dvije sekunde, samo što je potrebno voziti na četiri sekunde iza vozila koje je ispred, u uvjetima kiše i vlažne ceste.

- Pravilo deset sekundi

Izgleda kao mnogo vremena – manje od deset sekundi treba vrhunskim atletičarima da prijeđu 100 metara. Međutim, kako ovo pravilo vrijedi kad je cesta pokrivena snijegom i ledom, treba znati da se u ekstremnim vremenskim uvjetima produžuje put kočenja automobila (pa čak i onih najnovijih i najmodernijih). (http://www.automanija.com/hak-vozaci-u-hrvatskoj-uglavnom-ne-postuju-razmak-izmedu-vozila/). Slijedi prikaz ulica za koje je računat kapacitet.

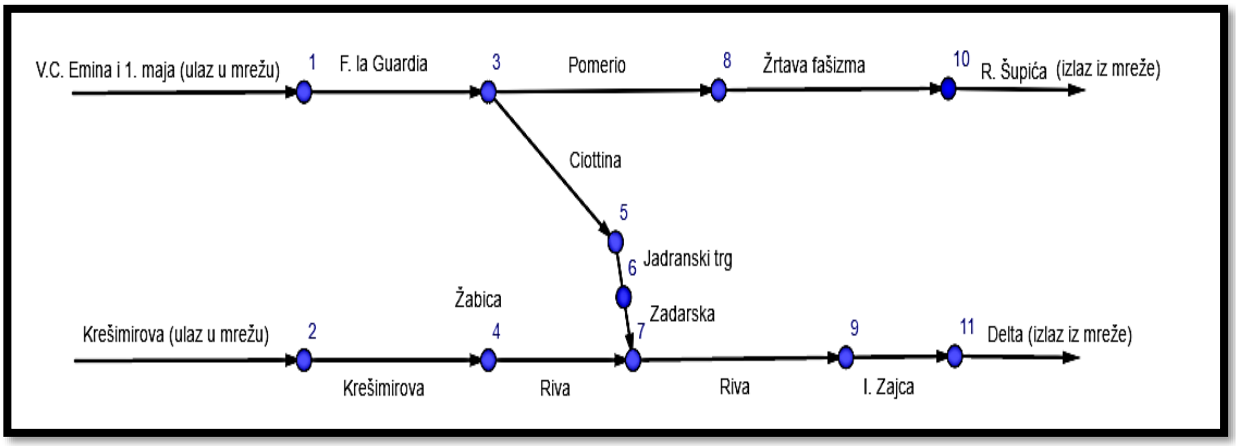
Slika 16.: Prikaz dijela grada Rijeke, u kojem su odabrane ulice



Izvor: https://www.google.com/maps/place/

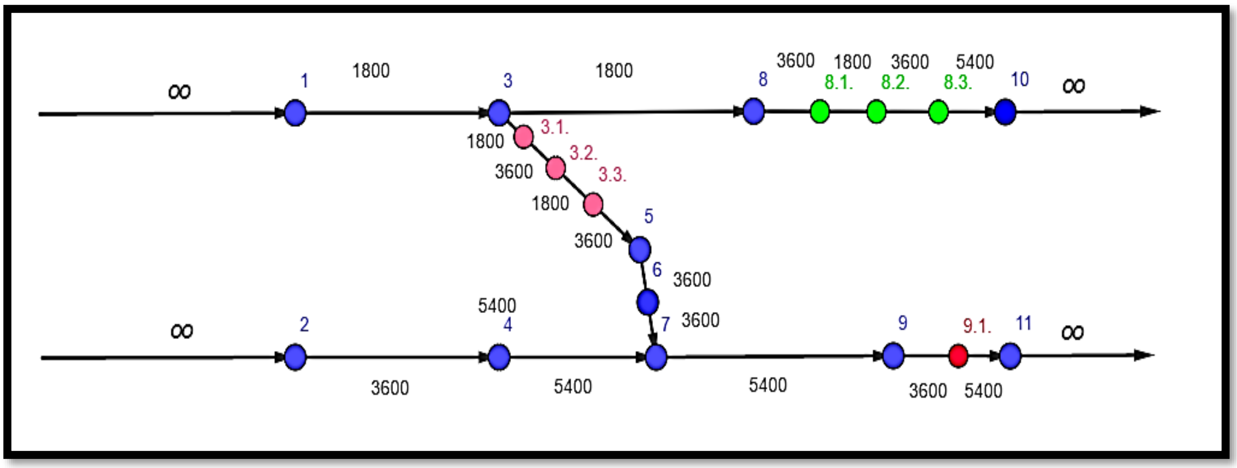
Na slici br. 17. prikazana je mreža ulica, s ulazima i izlazima iz mreže, odnosno izvorima i ponorima te međusobni položaj ulica. Slika br. 18. prikazuje kapacitet svake ulice, ili dijela ulice, prema unaprijed prikazanom načinu izračuna.

Slika 17.: Mreža ulica za izračun



Izvor: izradila Autorica

Slika 18.: Prikaz kapaciteta ulica



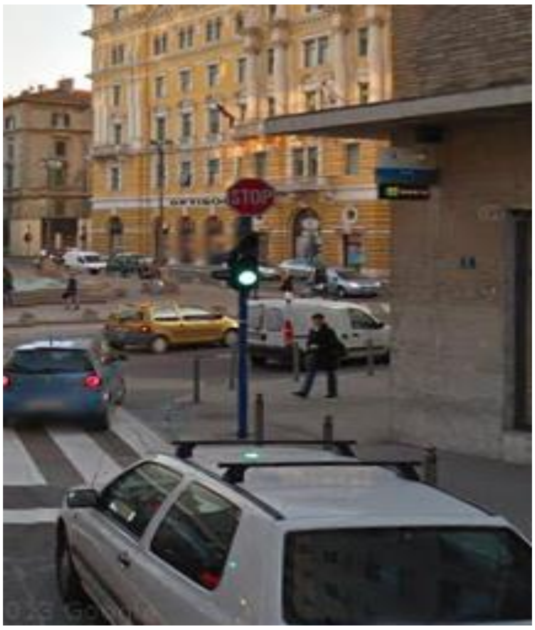
Izvor: izradila Autorica

6.2. Primjena Ford-Fulkersonovog teorema za izračun maksimalnog kapaciteta u odabranim ulicama grada Rijeke

S obzirom da se izračunati kapacitet odnosi na sat zelenog svjetla na semaforu, potrebno je izračunati, za svaki pojedinačni semafor u mreži, koliko trajanje je zelenog svjetla u jednom satu na semaforu. Mjereno je vrijeme svakog ciklusa na semaforima te izračunat odnos faze zelenog svjetla u ciklusu.

Ciklus je vrijeme koje protekne od početka paljenja jedne kombinacije signalnih pojmova do ponovnog paljenja te iste kombinacije, tj. vrijeme u kojemu se izmijene sve faze u ciklusu. Faza je dio ciklusa u kojem jedna ili više skupina vozila ili pješaka ima slobodan prolaz. Trajanje pojedine faze ne smije biti kraće od 15 sekundi. (Barišić, 2014., 87.)

Slika 19.: Semafor u Ciottinoj ulici



Izvor: https://www.google.com/maps/place/Ciottina+ul.,+51000,+Rijeka

Na semaforu, na slici 19., zeleno svjetlo u ciklusu traje 25 sekundi. Ciklus traje 76 sekundi. Postotak zelenog svjetla u ciklusu iznosi 32,9%. Prema tome, unutar jednog sata, odnosno 60 min., zeleno svjeto je upaljeno 19,7 min.

Slika 20.: Semafor na Žabici, ulica Riva

Izvor: https://www.google.com/maps/place/%C5%BDabica,+51000,+Rijeka/

Na semaforu, na slici 20., zeleno svjetlo u ciklusu traje također 25 sekundi. Ciklus traje 76 sekundi. Postotak zelenog svjetla u ciklusu iznosi 32,9%. Unutar jednog sata, odnosno 60 min., trajanje zelenog svjetla iznosi 19,7 min.

Ciklusi semafora u ulici Jadranski trg i Zadarskoj ulici traju također 76 sekundi. Trajanje faze zelenog svjetla, za automobile, iznosi 25 sekundi. U tijeku jednog sata trajanje zelenog svjetla je 19,7 min.

Trajanje ciklusa semafora u ulici Riva iznosi 120 sekundi. Od toga je trajanje zelenog svjetla 45 sekundi. Postotak zelenog svjetla u ciklusu iznosi 37,5%. U jednom satu zeleno svjetlo je upaljeno 22,5 min.

U ulici Ivana Zajca ciklus iznosi također 120 s, ali je faza zelenog svjetla za automobile u trajanju od 40 s. Istim izračunom riješeno je da trajanje zelenog svjetla u jednom satu iznosi 20 min., odnosno 33,33%.

U ulici Forella la Guardia trajanje ciklusa na oba semafora iznosi 130 s, a trajanje zelenog svjetla 60 s. U toku jednog sata zeleno svjetlo je upaljeno 46,15%, tj. 27,70 min., a za drugi 42,9%, odnosno 25,7 min.

U ulici Pomerio ciklus traje 140 s, a faza zelenog svjetla 60 s, što iznos 42,9%, odnosno 25,7 min.

Iz ulice Žrtava fašizma semafor ima trajanje ciklusa od 120 s. Od toga je trajanje zelenog svjetla 70 s, odnosno, unutar jednog sata 58,33%, tj. 35 minuta.

U sljedećem je koraku potrebno izračunati za koliko se smanjuje kapacitet vozila u jednom satu, s obzirom na trajanje zelenog svjetla u jednom satu. Različiti faktori smanjuju kapacitet te se dodatni mogu uvrstiti naknadno, npr. parkirna mjesta, ali u radu je dokazano smanjenje kapaciteta na primjeru izračuna semafora. S obzirom da prometni tok nikad nije optimalan ni homogen, na kapacitet mogu utjecati različiti čimbenici, a njihov utjecaj može se po potrebi izračunati. U ovom radu je prikazano ograničenje na primjeru semafora, kako bi pri ovim uvjetima i ovakvom radu semafora, upotrebom teorema, dobili maksimalni mogući kapacitet vozila. Za različito trajanje ciklusa ulazni podaci bili bi drugačiji ali princip računanja je jednak.

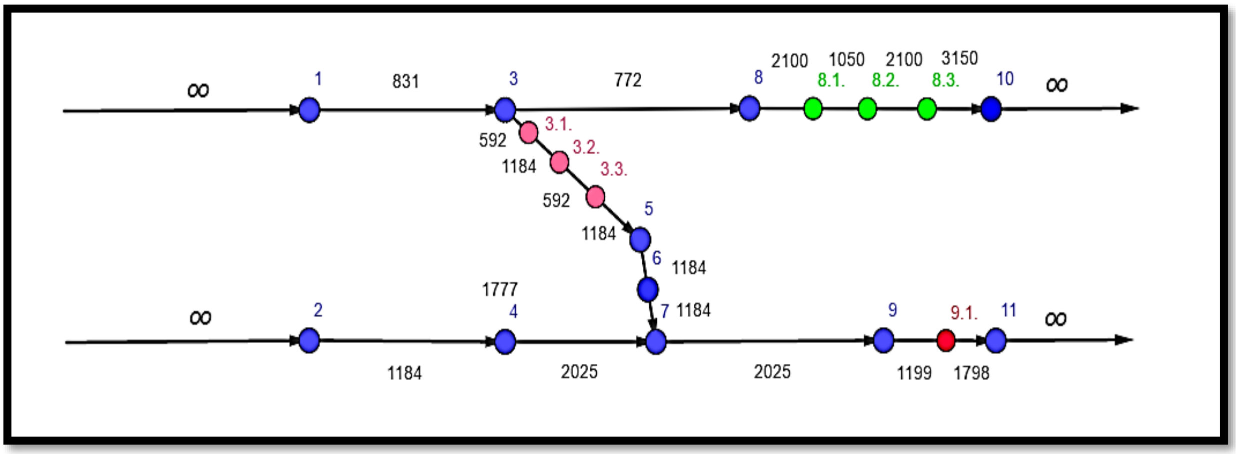
Također, u radu je prikazano i ograničenje po broju voznih traka u pojedinim ulicama. Broj traka se, zbog različitih razloga, najčešće parkinga, kroz jednu ulicu povećava i smanjuje, što je prikazano različitim kapacitetima unutar jedne ulice.

Za potrebe izračuna smanjenja kapaciteta postoje razlozi, koji se izračunavaju na način da se utvrdi kako i koliko utječu na kapacitet vozila. Također, prema navedenoj formuli za kapacitet, sigurnosna udaljenost je također stavka koja bitno pridonosi razlikama u broju vozila koja prolaze prometnicom. Dakle, u ovom radu je prikazan izračun primjera s određenim ulaznim podatcima, koji po potrebi, mogu biti drukčiji. Ovdje su prikazani ulazni podatci, koji su smatrani najadekvatnijima i najpotrebnijima, međutim, konkretnije situacije mogu zahtijevati proučavanje i uvođenje drugih parametara, koji ovdje nisu obrađeni, jer cilj i svrha istraživanja će odrediti koje pokazatelje i na koji način je potrebno uvesti u izračun.

Na sljedećoj slici prikazan je kapacitet za svaku ulicu po satu zelenog svjetla, tj. koliko vozila može proći određenom cestom unutar jednog sata, ali samo dok je zeleno svjetlo. Kako je već navedeno, npr. na prometnicama na kojima nema semafora, potrebno je uvesti različite ulazne podatke, odnosno utvrditi što smanjuje kapacitet te računati s tim podatcima. Princip i izračun algoritma je jednak u svakoj situaciji.

Ovime je dokazano koliko je široka primjena teorema u raznim prometnim situacijama te da se na svakoj dionici ceste mogu, pomoću teorema, izračunati potrebni podaci, koji će biti točni. Jedini je uvjet točno prepoznati ograničenja određene dionice u odnosu na ono što se računa.

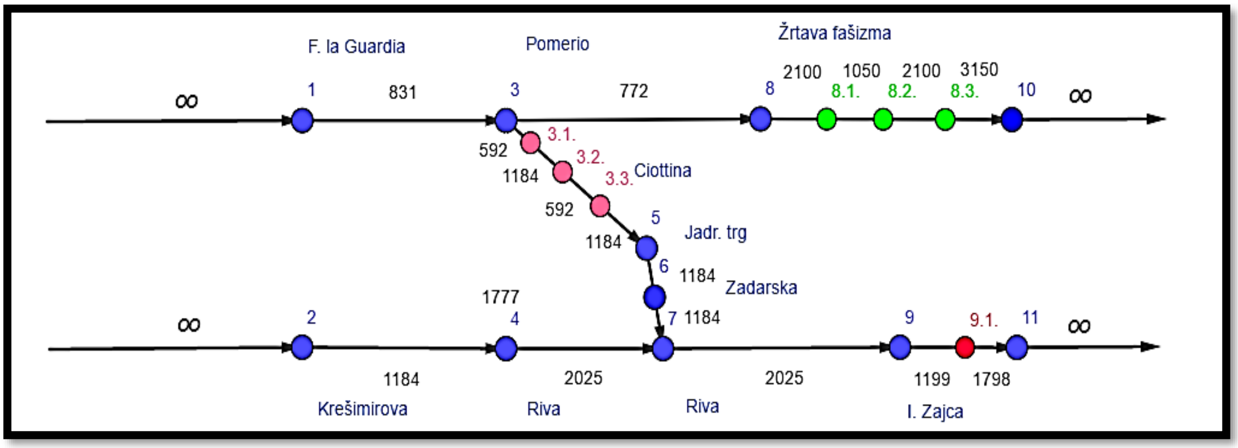
Slika 21.: Kapacitet ulica po satu zelenog svjetla



Izvor: izradila Autorica

Sljedeća slika prikazuje ulice s nazivima i kapacitetima po satu zelenog svjetla.

Slika 22.: Kapaciteti ulica



Izvor: izradila Autorica

Računanje Ford-Fulkersonovim teoremom podrazumijeva ishodište i odredište u mreži, tj. izvore i ponore, odnosno početne i završne točke te je na sljedećoj slici prikazana mreža s izvorima i ponorima. Početna točka a i završna b su fiktivni bridovi u mreži.

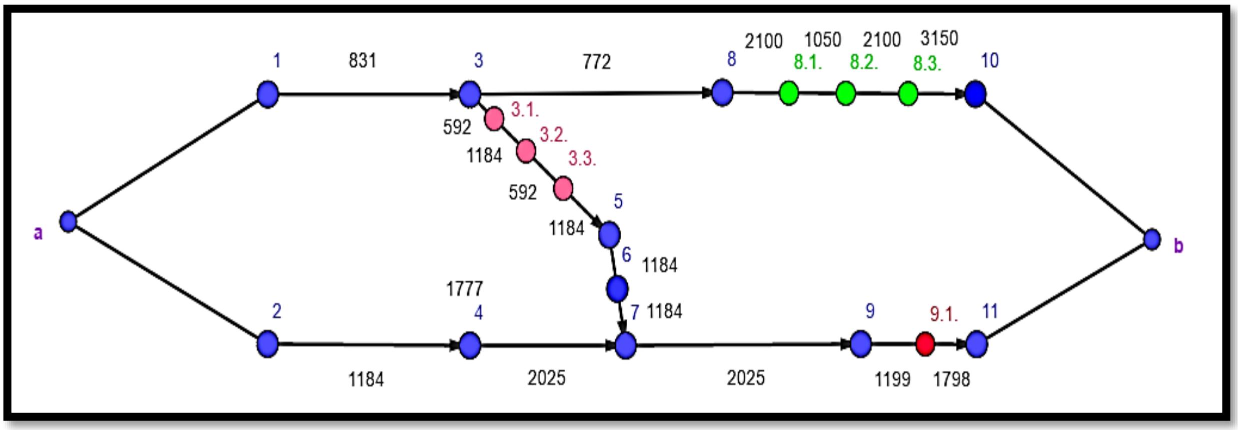
Pretpostalja se da je njihov kapacitet dovoljno velik, što znači da ti vrhovi ne stvaraju nikakvo ograničenje. To je početni graf, tj. mreža, od koje počinje izračun pomoću teorema.

Vrhovi su označeni nazivima ulica, a bridovi kapacitetom. Potrebno je izračunati maksimalan protok od vrha a do vrha b kroz mrežu. Korištene su metoda dodavanja pozitivnog toka i metoda etiketiranja.

6.3. Primjena metode dodavanja pozitivnog toka u izračunu Ford-Fulkersonova teorema

Ova metoda je jedna od dvije metode koje se koriste za izračun u Ford-Fulkersonovom teoremu. Na slici 23. prikazana je mreža, s izvorom i ponorom te su upisani podaci na temelju prethodnih izračuna.

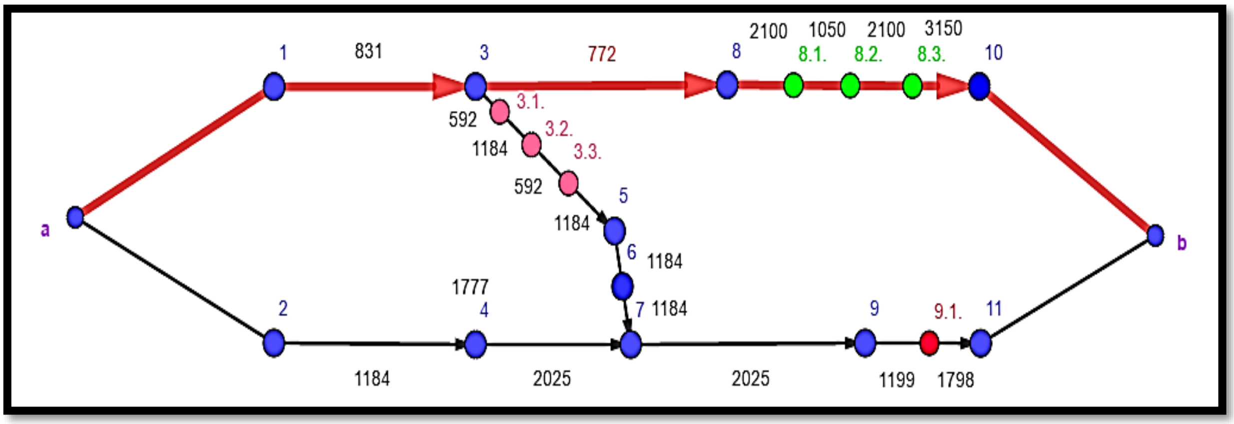
Slika 23.: Mreža za koju je potrebno pronaći maksimalan kapacitet



Izvor: izradila Autorica

U 1. koraku potrebno je naći najmanji kapacitet u najvišem putu. Na slici 24. je prikazan 1. korak te je vidljivo da je najviši put a – 1 – 3 – 8 -8.1. - 8.2. - 8.3. – 10 - b.

Slika 24.: Prvi korak u mreži - metoda dodavanja pozitivnog toka

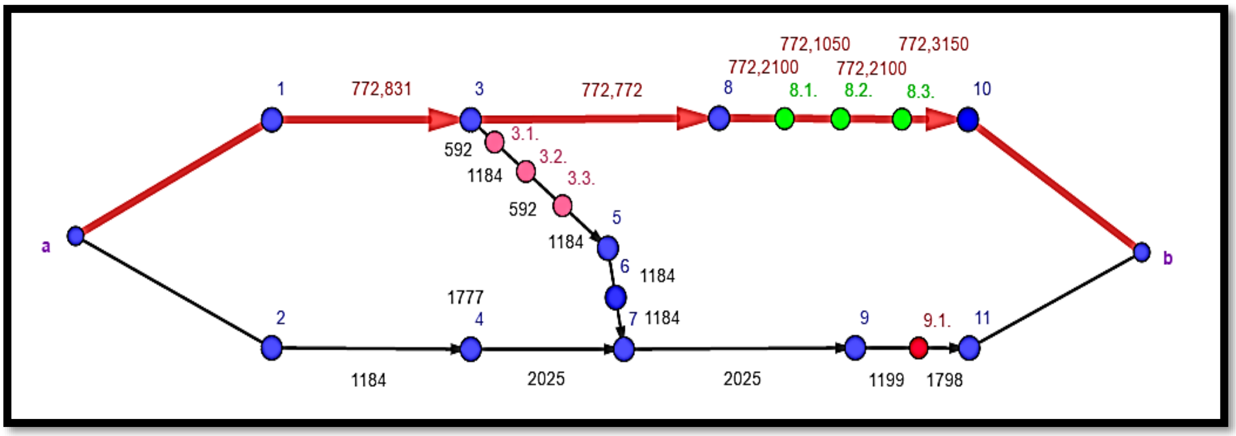


Izvor: izradila Autorica

Sljedeće je potrebno utvrditi najmanju propusnu vrijednost u najvišem putu, a to je 772, tj. tok od vrha 3 do 8.

Umanjenje su vrijednosti u tokovoma 1-3, 8-8.1., 8.1.-8.2., 8.2.-8.3. i 8.3.-10. za 772. Sada je vidljiva nova transportna mreža koja je prikazana na slici 25.

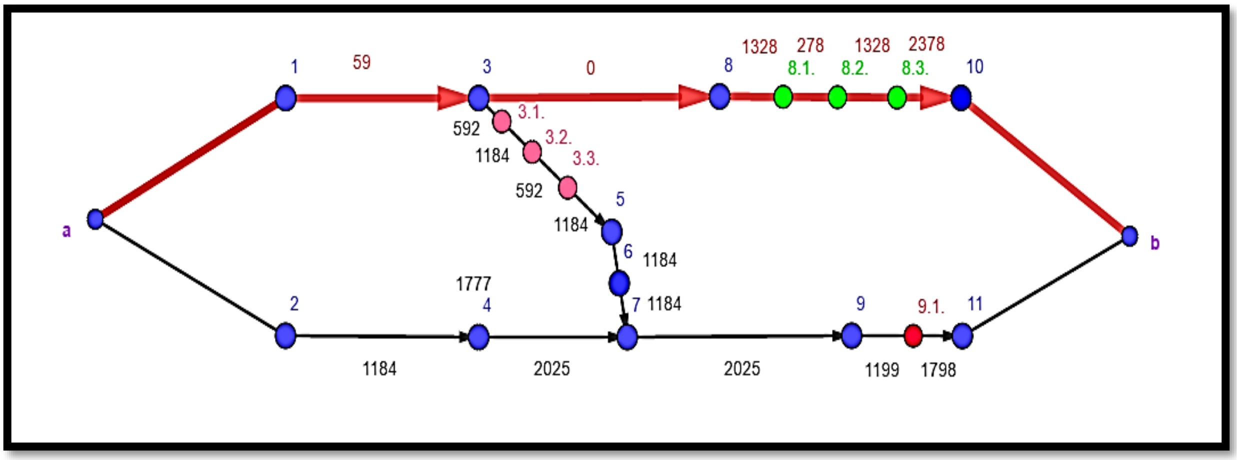
Slika 25.: Mreža nakon prvog koraka - metoda dodavanja pozitivnog toka



Izvor: izradila Autorica

a – 1 – 3 – 8 - 8.1. – 8.2. – 8.3. – 10 – b; k = 772

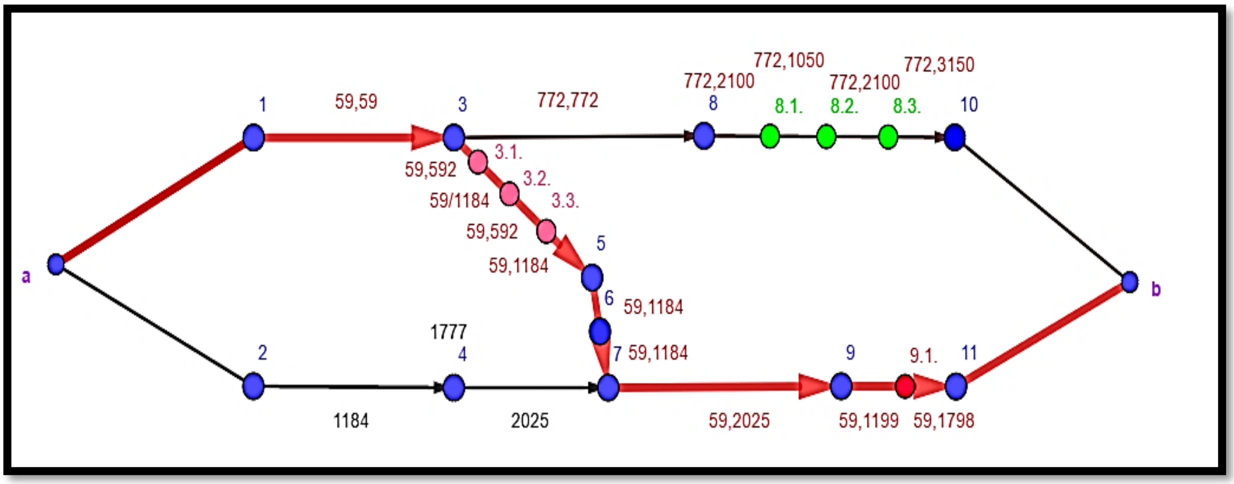
Slika 26.: Mreža nakon izračuna u prvom koraku - metoda dodavanja pozitivnog toka



Itvor: izradila Autorica

Ponovno se provodi jednak postupak. Vidljivo je da je put 3 – 8 zasićen, a na putu 1 – 3 ima 59 slobodnih jedinica, stoga je novi najviši put a – 1 – 3 - 3.1. - 3.2. - 3.3. - 5 – 6 – 7 - 9 - 9.1. – 11 – b, a tok s minimalnom propusnosti je 1 – 3, čija je vrijednost 59. Navedeni put se umanjuje za 59 jedinica, što je vidljivo na slikama 27. i 28.

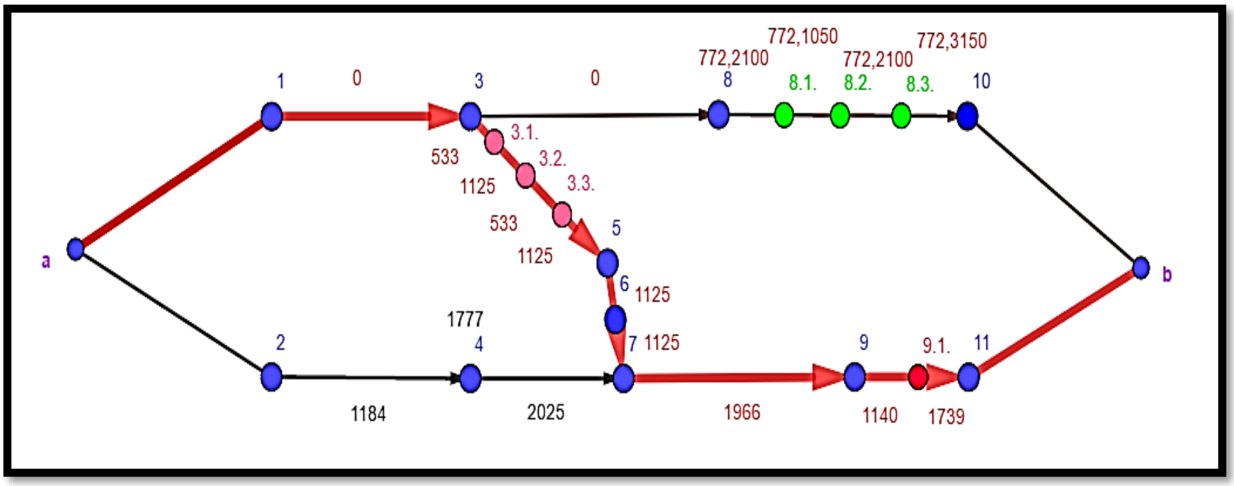
Slika 27.: Mreža nakon drugog koraka - metoda dodavanja pozitivnog toka



Izvor: izradila Autorica

a – 1 – 3 - 3.1. - 3.2. - 3.3. - 5 – 6 – 7 - 9 - 9.1. – 11 – b; k = 59

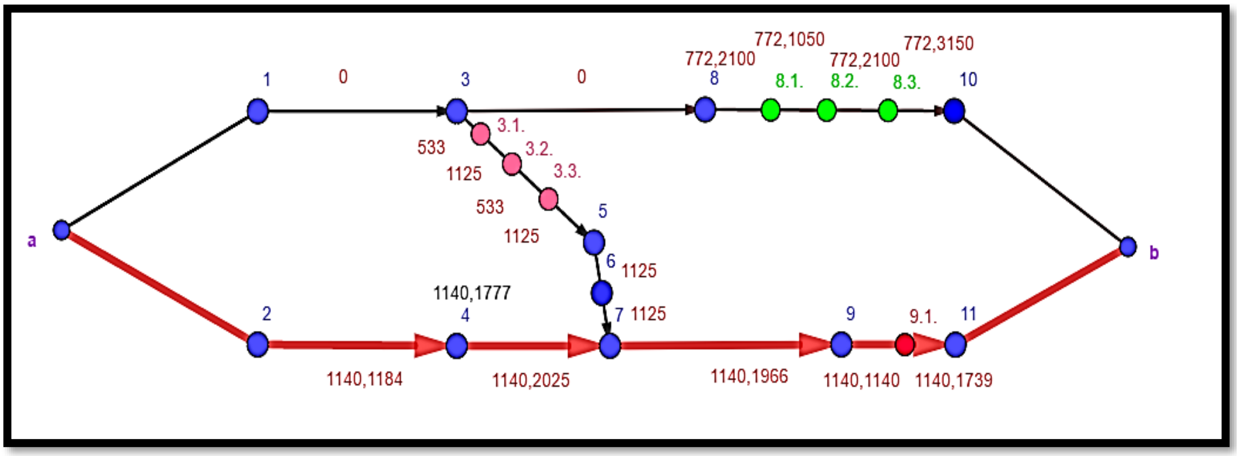
Slika 28.: Mreža nakon izračuna u drugom koraku - metoda dodavanja pozitivnog toka



Izvor: izradila Autorica

U sljedećem koraku ponovno je pronađen najviši put i najniža vrijednost puta. Put je sljedeći: a – 2 – 4 – 7 – 9 – 9.1. – 11 – b. Najniža vrijednost iznoi 1140 i nalazi se na putu od vrha 9 do vrha 9.1. Umanjene su vrijednosti na navedenom putu, što je vidljivo na slikama 29. i 30.

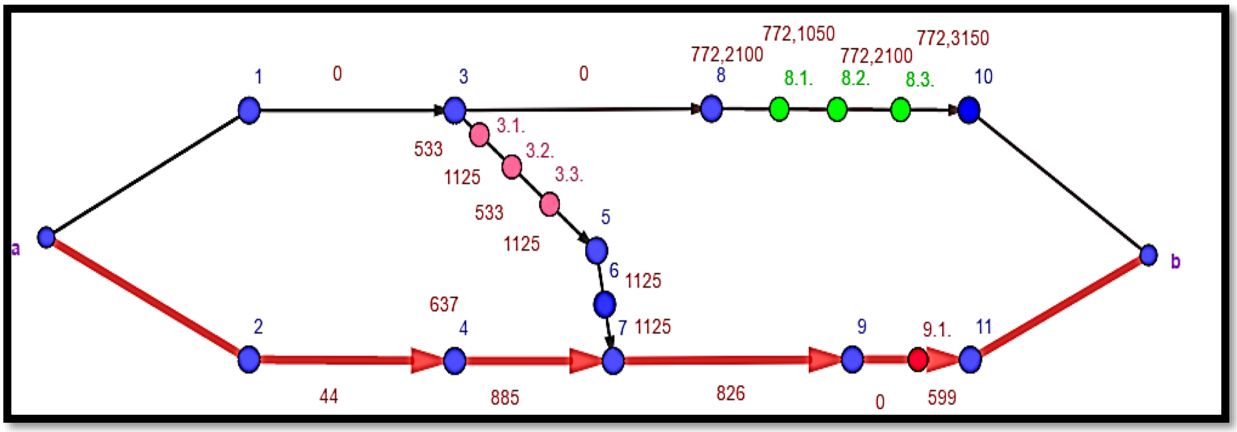
Slika 29.: Mreža nakon trećeg koraka - metoda dodavanja pozitivnog toka



Izvor: izradila Autorica

a – 2 – 4 – 7 – 9 – 9.1. – 11 – b; k = 1140

Slika 30.: Mreža nakon izračuna u trećem koraku - metoda dodavanja pozitivnog toka



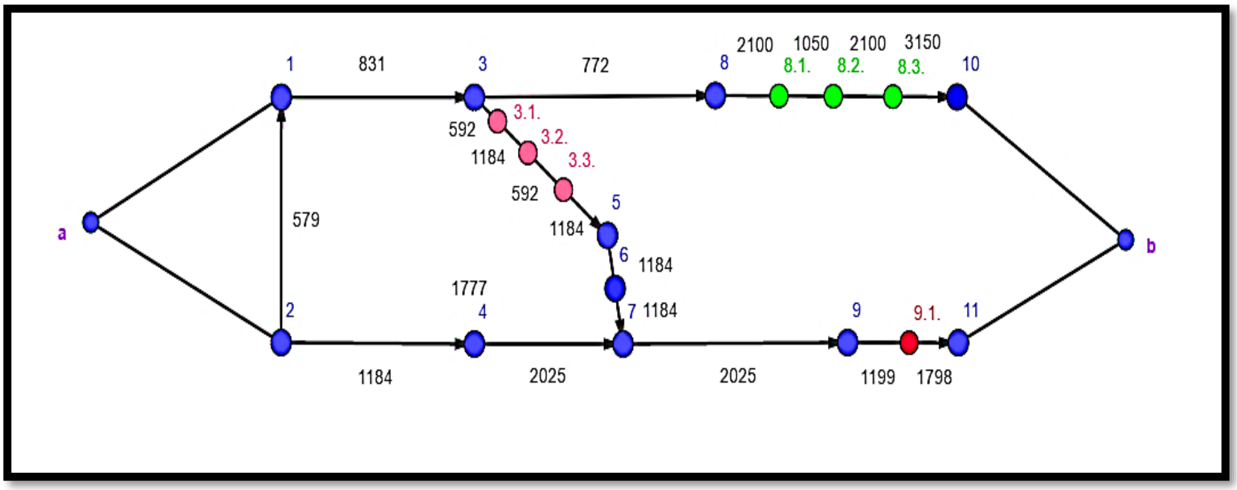
Izvor: izradila Autorica

S obzirom da više ne postoji neprekinuti put od vrha a do vrha b, tj. ne postoji mogućnost daljnjeg propuštanja automobila, koji bi, pod ovim ograničenjima i uvjetima, mogli prometovati dionicama a – b, ovime algoritam završava. Maksimalan kapacitet je dobiven nakon zbrajanja tokova, koji su u svakom od koraka bili tokovi s najmanjom vrijednosti, tako da maksimalni kapacitet iznosi: k1 + k2 + k3 = 772 + 59 + 1140 = 1971 voz/h.

6.4. Primjena metode etiketiranja u izračunu Ford-Fulkersonova teorema

Metoda etiketiranja se također koristi u izračunu Ford-Fulkersonova teorema. Izračun objema metodama, ukoliko je točan, mora dati jednak rezultat. Na slici je ista početna mreža kao i u računanju prvom metodom. Zadatak je također isti, potrebno je izračunati maksimalan kapacitet u mreži od vrha a do vrha b.

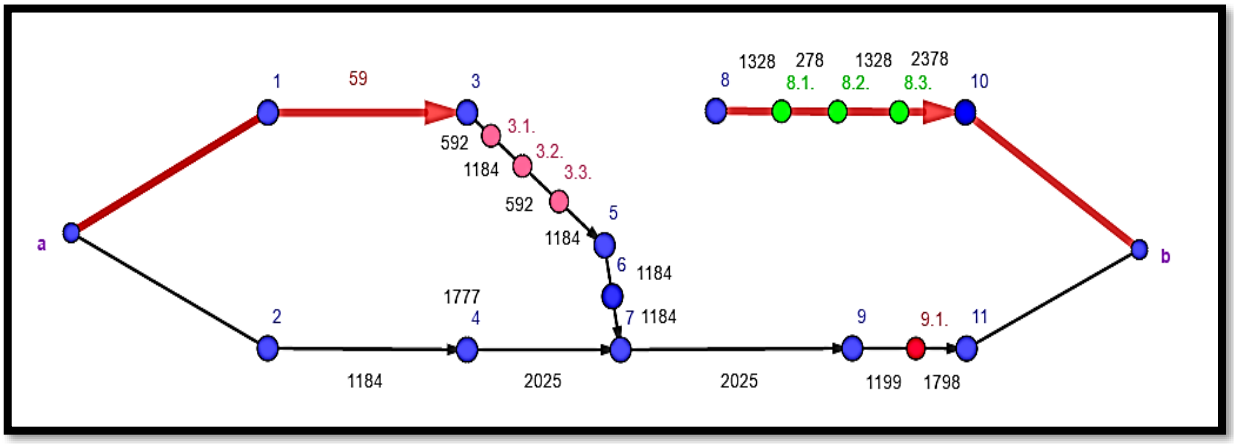
Slika 31.: Mreža za izračun – metoda etiketiranja



Izvor: izradila Autorica

U prvom koraku je izabrana najmanja vrijednost u najvišem putu. Dakle, put je sljedeći: a – 1 – 3 – 8 – 8.1. – 8.2. – 8.3. – 10 – b. Najmanja vrijednost u ovom putu iznosi 772, što znači da tim putem može proći 772 jedinice, odnosno vozila. Sljedeća slika prikazuje mrežu nakon prvog koraka.

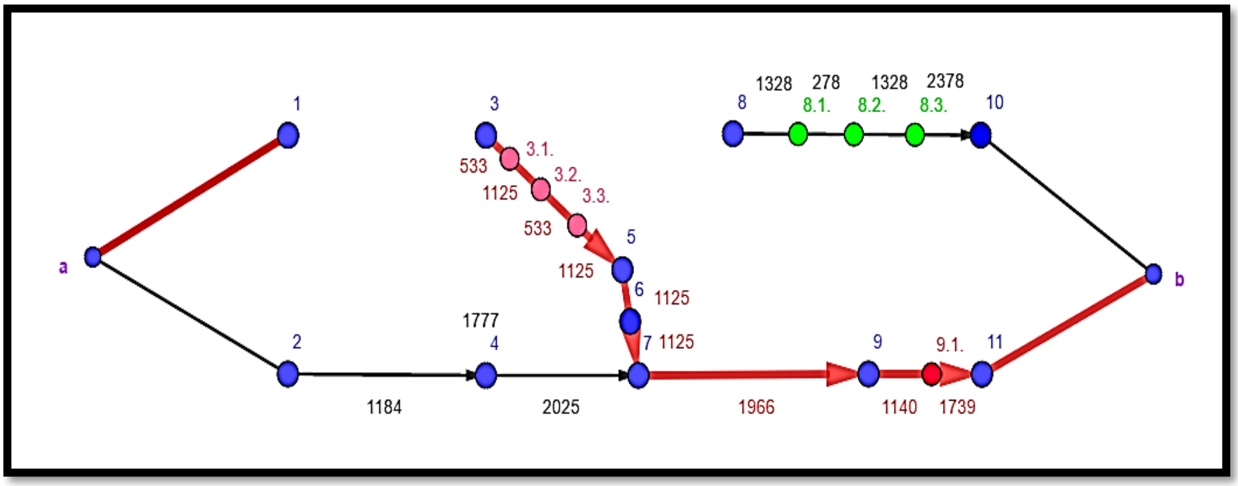
Slika 32.: Mreža nakon prvog koraka – metoda etiketiranja



Izvor: izradila Autorica

U drugom koraku, obzirom da je put 3 - 8 potpuno iskorišten, prikazano je slanje 59 jedinica, odnosno vozila, do vrha 3, pa preko vrhova 3.1., 3.2., 3.3., 5, 6, 7, 9, 9.1., 11. do odredišta b. To je prikazano na slici 33. Također, slanjem 59 vozila put od vrha 1 do vrha 3 je potpuno iskorišten te nije više vidljiv na slici.

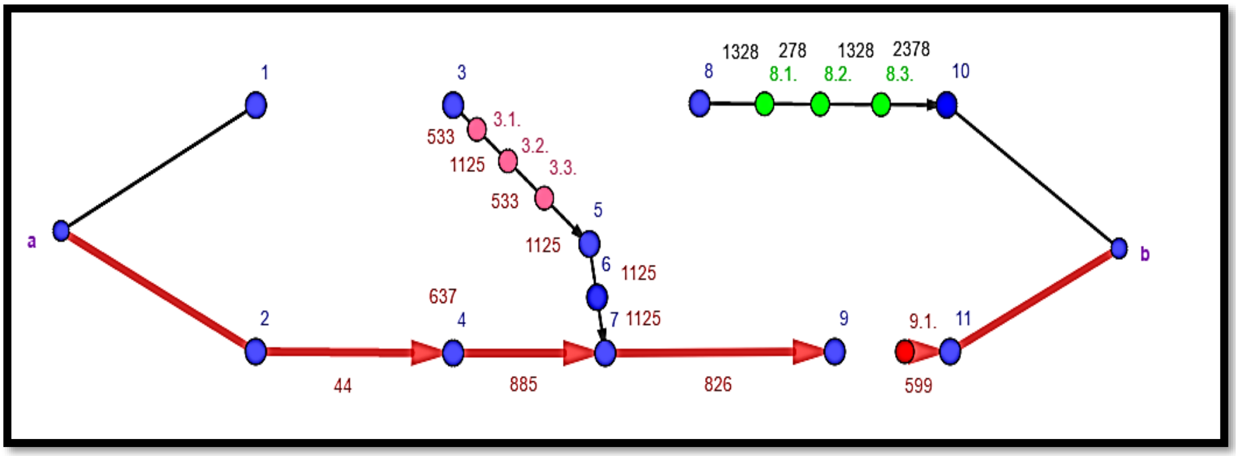
Slika 33.: Mreža nakon drugog koraka – metoda etiketiranja



Izvor: izradila Autorica

S obzirom da su potpuno iskorišteni putevi 3 – 8 i 1 – 3 pristupljeno je analizi ostalih puteva koji vode od izvora do odredišta. Vidljivo je da je jedini preostali put, koji vodi od točke a do b sljedeći: a – 2 – 4 – 7 – 9 – 9.1. – 11. U tom putu potrebno je pronaći najmanju vrijednost a ona iznosi 1140 i spaja vrhove 9 i 9.1. Na sljedećoj slici je vidljivo smanjenje vrijednosti duž tog puta i nestanak puta 9 – 9.1.1.

Slika 34.: Mreža nakon trećeg koraka – metoda etiketiranja



Izvor: izradila Autorica

Više ne postoji niti jedan put, koji nesmetano i neprekinuto vodi do točke a do točke b, odnosno od izvorišta do odredišta te ovime algoritam završava.

Maksimalni protok predstavlja zbroj najmanjih jedinica iz svakog mogućeg puta, odnosno zbroj maksimalno moguće poslanih jedinica, tj. vozila, u svakom putu te on iznosi: k1 + k2 + k3 = 772 + 59 + 1140 = 1971 voz/h.

Obje korištene metode su dale jednak i točan rezultat. Zaključeno je da maksimalan kapacitet po satu zelenog svjetla, na putu od točke a do točke b, iznosi 1971 vozilo.

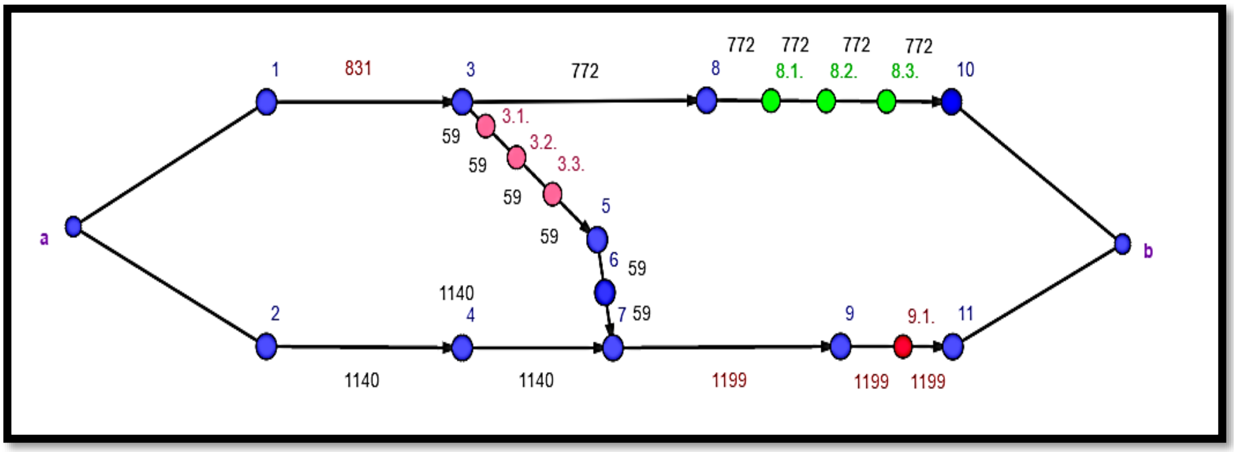
Na sljedećoj slici biti će prikazan način prolaska vozila kroz mrežu kako bi bio ostvaren optimalan put. Odnosno, vozila iz ukupnog izračunatog maksimalnog kapaciteta rapoređena su kao na sljedećoj slici, tj. prema prolasku broja vozila kroz određene ulice. Nakon izračuna maksimalnog kapaciteta prikazan je i optimalan put kroz ulice, od vrha a do vrha b, po broju vozila.

Način na koji je izračunato je sljedeći: za svaki od tri moguća puta određeni broj vozila prolazi kroz određene ulice. S obzirom da se u pojedinim putevima ulice preklapaju, to znači da je potrebno zbrojiti minimalne vrijednosti, odnosno maksimalnee kapacitete u tim ulicama, kako slijedi:

1. put -	a – **1 – 3** – 8 - 8.1. – 8.2. – 8.3. – 10 – b;	k = 772
2. put -	a – **1 – 3** - 3.1. - 3.2. - 3.3. - 5 – 6 – **7 - 9 - 9.1. – 11** – b;	k = 59
3. put -	a – 2 – 4 – **7 – 9 – 9.1. – 11** – b;	k = 1140

Vidljivo je da u putu broj 1. vozila prolaze od ulice 1. do ulice 3., odnosno vrha 1. do vrha 3., te je za taj dio zbrojen kapacitet 772 + 59, što iznosi 831. Također, vidljivo je da i u drugom i trećem putu vozila prolaze istim ulicama. Drugi i treći put prolaze kroz ulice 7 – 9 - 9.1. – 11 te je potrebno zbrojiti kapacitete tih puteva, što iznosi: 59 + 1140 = 1199. Slijedi prikaz optimalnog puta s obzirom na izračun.

Slika 35.: Prikaz optimalnog puta u mreži, s obzirom na kapacitet



Izvor: izradila Autorica

Kapacitet, računat po formuli, iznosio je 1800 vozila (do maksimalnih 3600 vozila pri minimalnom sigurnosnom razmaku), uzevši u obzir ograničenja brzine i sigurnosnog razmaka. U izračunu Ford-Fulkersonovim teoremom uvedena su dodatna ograničenja po broju traka i trajanju zelenih svjetla na semaforima, jer se radi o gradskim uvjetima, gdje semafori uvelike utječu na kapacitet te je prikazan povoljniji, točniji i precizniji način računanja za određeni put. Prikazan je dakle, nakon izračuna, točan broj vozila, bez oscilacija, koji mogu proći navedenim putem, što predstavlja precizan broj s ovim ulaznim podatcima.

U radu je Ford-Fulkersonovim teoremom računat maksimalan protok za određene ulice i za prolaz putem koji zadovoljava povezan put od točke a do b. Vidljivo je da je u određenim ulicama ostao neiskorišten kapacitet, to je također dokaz da je teorem široko primjenjiv, jer u radu su uzeta ograničenja po broju voznih traka i radu semafora. Dokaz neiskorištenih kapaciteta u pojedinim ulicama dokaz je točnosti, jer npr. ulaz u mrežu, u ulici Fiorella la Guardia, je u jednoj voznoj traci, dok je izlaz, u ulici Žrtava fašizma, u više voznih traka, pa je na tom mjestu logičan neiskorišten kapacitet. On bi vjerojatno bio iskorišten kad bi se u proračun uzele sporedne ceste, kojima se također uključuju vozila u tu ulicu te npr. uključivanja iz tri garaže u blizini. Također, primjena teorema moguća je na puno širim područjima kao i na manjim, npr. na području jedne ulice. Ovim primjerom, u dijelu grada Rijeke, izračunat je maksimalan kapacitet za navedeni put kroz određene ulice, s uvedenim određenim ograničenjima i on iznosi 1971 voz/h. Široka primjenjivost daje mnogobrojne mogućnosti, ovisno o potrebama, lokaciji, uvjetima dionice itd.

7. ZAKLJUČAK

Razni prometni problemi mogu biti prikazani putem grafova. To je vrlo učinkovito jer je problem vizualno pojednostavljen te se upotrebom algoritama može pronaći najbolje moguće rješenje. Svojstva problema prikazana u grafu omogućavaju uvid u realnu situaciju te mogućnosti njegova rješavanja. S obzirom da je u prometnim problemima grafu potrebno dodijeliti određene vrijednosti, graf postaje težinski graf, odnosno mreža, iz koje je moguće isčitati potrebna obilježja. Slijedom navedenog, teorija grafova kao matematička disciplina vrlo učinkovito prikazuje prometne probleme i omogućuje njihovo rješavanje matematičkim metodama.

Vrlo važnu stavku matematičke discipline predstavljaju algoritmi. Pomoću njih rješavaju se problemi prikazani grafovima, što je vrlo efikasno u problemskim prometnim situacijama. Na primjeru korištenog algoritma u radu potvrđena su svojstva algoritama te je rješavanjem dokazana njegova učinkovitost; dokazano je rješavanje odvojenim koracima koji vode konačnom cilju, nakon određenog broja koraka dolazi se do rezultata, za iste ulazne podatke rezultat je jednak i algoritam je primjenjiv za više ulaznih vrijednosti.

Maksimalan protok čest je transportni problem, vidljiv u različitim vrstama prometa i situacijama te je matematično modeliranje, upotrebom algoritama na mrežama, učinkovito u rješavanju takvih teških problema. U radu je korišten Ford-Fulkersonov algoritam, na problemu pronalaska maksimalnog kapaciteta u ulicama u centru grada Rijeke te je dokazana primjena i učinkovitost algoritma na grafove, odnosno mreže, u rješavanju prometnog problema koji se često pojavljuje i koji je teško rješavati. Računanje je prikazano objema metodama koje se koriste za računanje Ford-Fulkersonovog teorema, metodom dodavanja pozitivnog toka i metodom etiketiranja.

Poznavanje kapaciteta bitan je inženjerski podatak za donošenje zaključaka te prema kapacitetu se proračunavaju svi modeli i mjere efikasnosti. Potrebno je dokazati kapacitivnu efikasnost te da cestovna mreža može primiti planirano i postojeće prometno opterećenje. Problem izračunavanja kapaciteta predstavlja težak problem zbog nemogućnosti homogenog toka te se u proračun uzimaju relativne vrijednosti. Kada bi prometni tok mogao biti homogen, tj. kada bi sva vozila ostvarivala jednaku brzinu na odabranoj dionici, na kojoj bi bili jednaki uvjeti vožnje, kada bi put kočenja bio jednak i kada bi odluke vozača bile iste, kapacitet bi bilo mnogo jednostavnije izračunati. Međutim, već same odluke vozača dovode do nehomogenosti, što onda predstavlja teže izračunavanje. S obzirom da značenje kapaciteta pretpostavlja maksimalan broj vozila koji cesta može primiti u danim uvjetima, matematičko modeliranje omogućava izračun s određenim uvjetima na odabranoj cesti.

Izračun kapaciteta pomoću formule temelji se na ulaznim podatcima brzine i sigurnosnog razmaka, dok se ostale varijable, koje utječu na kapacitet, zanemaruju. Prema tim ulaznim podatcima izračun daje podatke o 1800 voz/h pri sigurnosnom razmaku od 2 s, odnosno 3600 voz/h pri 2 s. Međutim, uvjeti na cesti nikad nisu homogeni te na kapacitet utječu različiti ostali faktori, npr. bočne smetnje, ciklusi semafora, tehnički elementi ceste, znakovi stop, broj voznih traka itd.. Glede navedenog, kapacitet za različite vrste ceste i za različite dionice ceste različit je zbog različitih uvjeta te ga je teško izračunati.

U radu je prikazan izračun na primjeru Bankoka, ali bez dodatnih ulaznih podataka, temelji se na odnsou brzine i kapaciteta. Na primjeru ulica u centru grada Rijeke prikazan je izračun pomoću Ford-Fulkersonova teorema, gdje su uvedeni parametri trajanja faza zelenog svjetla na semaforu i broja voznih traka u ulicama i kroz ulice. Dobiveni rezultat iznosi 1917 voz/h po satu zelenog svjetla, što ukupno gledano, predstavlja rezultat koji govori da je kapacitet u centru grada Rijeke na dobrom nivou. Na određenim ulicama vidljiv je neiskorišteni kapacitet, međutim, kapacitet je izračunat za određene ulice, dok sporedne ulice, izlaz iz garaža u ulice itd. nisu uzete u proračun. Iz navedenog je vidljivo da se može u proračun uzeti bilo koja cesta ili ulica, sa svojim specifičnostima te izračunati kapacitet.

Cilj u radu je bio dokazati izračun kapaciteta na odabranim ulicama kroz dvije metode i dokazati široku primjenjivost na bilo kojoj lokaciji, što je ovim izračunom, na primjeru centra grada Rijeke, pomoću Ford-Fulkersonovog teorema i postignuto.

POPIS LITERATURE

Nastavni materijali:

Barišić, I.: Nastavni materijali iz kolegija Planiranje infrastrukture u cestovnom prometu, Veleučilište u Rijeci, Rijeka, 2014.

Knjige:

Pašagić, H.: Matematičko modeliranje i teorija grafova, Sveučilište u zagrebu, Fakultet prometnih znanostii, Zagreb, 1998.

Pašagić, H.: Matematičke metode u prometu, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2003.

Članci na web-stranici:

Moore, E, Kichainukon, W., Phalavonk, U.: Maximum flow in road networks with speed-dependent capacities – application to Bangkok traffic, 35 (4), 489-499, Jul. - Aug. 2013, http://rdo.psu.ac.th/sjstweb/journal/35-4/35-4-15.pdf (20.3.2018.)

Nikšić, F.: Traženje najkraćeg puta, str. 5., 2003., PlayMath br. 3 https://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=3246 (1.4.2018.)

Izvori s Interneta:

Biondić, M.: Propuna moć i razina usluge na auto cesti A1, Završni rad, Veleučilište u Gospiću, Gospić, 2016., https://repozitorij.velegs-nikolatesla.hr/islandora/object/velegs%3A567/datastream/PDF/view (20.3.2018.)

Bujanović, T.: Algoritmi za traženje maksimalnog toka minimalne cijene u mreži, Diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2017., https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf%3A2459 (16.3.2018.)

Carić, T.: Optimizacija prometnih procesa (nastavni tekst), Fakultet prometnih znanosti, Sveučilište u Zagrebu , Zagreb, 2014., http://files.fpz.hr/Djelatnici/tcaric/Tonci-Caric-Optimizacija-prometnih-procesa.pdf (17.5.2018.)

Cvitanović, D.: Predavanja na sveučilišnom diplomskom studiju iz predmeta Prometna tehnika, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Split, http://eucenje.gfmo.ba/predmeti/attachments/article/2106/prometnatehnikazaweb2.pdf (10.5.2018.)

Dadić, I., Kos, G., Ševrović, M.: Teorija prometnog toka, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2014., http://files.fpz.hr/Djelatnici/msevrovic/Teorija-prometnih-tokova-2014-skripta.pdf (1.4.2018.)

Dašić, T., Stanić, M.: Metode optimizacije, grafovi, algoritmi, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2014., http://www.grf.bg.ac.rs/p/learning/predavanje___metode_optimizacije___grafovi_1__i_2__1417124650453.pdf (17.3.2018.)

Hadžialić S., Korlat A.: Maksimalan protok, Univerzitet u Sarajevu, Fakultet za saobraćaj i komunikacije, https://www.academia.edu/31507648/Maksimalni_protok (25.3.2018.)

Kramberger, T., Fošner, M.: Teorija grafova, 2009., http://e.math.hr/taxonomy/term/7/0 (26.3.2018.)

Legac, I.: Cestovne prometnice i javne ceste, 2006., http://groups.csail.mit.edu/medg/people/chris/taiwan-traffic.jpg (25.3.2018.)

Marinović M.: Teorija grafova, Seminarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb http://www.zemris.fer.hr/predmeti/mr/arhiva/2002-2003/seminari/finished/pdf/grafovi.pdf (10.4.2018.)

Novačko L., Pilko, H.: Cestovne prometnice, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb., 2017., http://files.fpz.hr/Djelatnici/lnovacko/Novacko-Pilko-Cestovne-prometnice-2-prirucnik.pdf

(21.4.2018.)

Šangulin, T.: Analiza s prijedlogom poboljšanja projektnih elemenata državne ceste D503, Završni rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2015., https://repozitorij.fpz.unizg.hr/islandora/object/fpz:419/preview (17.5.2018.)

Štambuk, Lj.: Mreže, Veleučilište u Rijeci, Rijeka, http://veleri.hr/~ljstambuk/Kvantitativne%20za%20web/Kvantitativne%202%20web.pdf (17.5.2018.)

URL izvori:

https://www.prometna-zona.com/eksploatacijske-znacajke-ceste/ (01.6.2018.)

https://www.veleri.hr/files/datotekep/nastavni_materijali/k_poduzetnistvo_s1/Kvantitativne_za_poduzetnike_Pr4_Izv.pdf (1.6.2018.)

www.fer.unizg.hr/_download/repository/Osnovni_pojmovi-teorija_grafova.pdf (28.5.2018.)

https://hr.wikipedia.org/wiki/Algoritam (26.5.2018.)

https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Osnovni_pojmovi-teorija_grafova.pdf (17.5.2018.)

http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml07199/algoritmi-final/Transportne_mreze.html (20.4.2018.)

http://www.automanija.com/hak-vozaci-u-hrvatskoj-uglavnom-ne-postuju-razmak-izmedu-vozila/ (24.4.2018.)

http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/dragance/Knjiga1MO.pdf (24.4.2018.)

https://en.wikipedia.org/wiki/L._R._Ford_Jr. (20.3.2018.)

https://angelberh7.wordpress.com/2014/10/08/biografia-de-lester-randolph-ford-jr/ (20.3.2018.)

http://web.archive.org/web/20071123094334/http://www.geocities.com/nayan_vt/lester_randolph_ford1.htm (25.3.2018.)

https://en.wikipedia.org/wiki/D._R._Fulkerson (20.3.2018.)

http://www.orie.cornell.edu/news/seminars/fulkerson-bio.cfm (22.3.2018.)

http://autoskola-chill.hr/razmak-izmedu-vozila-u-prometu/ (10.5.2018.)

http://estudent.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove_prometnog_inzenjerstva/Materijali/PROMETNI_TOK_2012.pdf (12.5.2018.)

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA